

## 4

**ENGRANAJES**

Generalidades: Los engranajes son, en general, cilindros con resaltos denominados *dientes*,

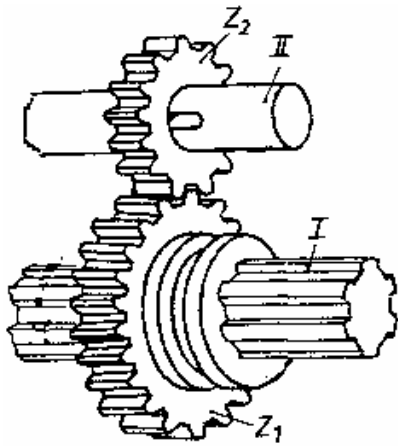


Fig.4.1

conformando ruedas dentadas, las que permiten, cuando giran, transmitir el movimiento de rotación entre sus árboles o ejes colocados a una distancia relativamente reducida entre sí. Esta transmisión se realiza mediante la presión que ejercen los dientes de una de las ruedas, denominada *motora* sobre los dientes de la otra rueda, denominada *conducida*, cuando engranan entre ambas, estando durante el movimiento en contacto varios dientes sin choques ni interferencias que lo impidan o entorpezcan. Los engranajes cilíndricos pueden ser de dientes rectos, cuando éstos son paralelos al eje de giro del cilindro, o de dientes helicoidales, cuando son parte de una hélice que envuelve a dicho eje. En la figura (Fig.4.1) se pueden observar dos engranajes cilíndricos rectos que

engranan entre sí,  $z_1$  y  $z_2$  estando montados sobre los ejes *I* y *II*, siendo el primero estriado, lo que permite al engranaje  $z_1$  deslizarse a lo largo del mismo, ocupando otra posición.

Distintos materiales se utilizan para la construcción de los engranajes pudiendo ser éstos fundición de hierro, acero, bronce, aluminio, materiales sintéticos, como el teflón, por ejemplo, etc.

Debido al constante rozamiento entre las superficies en contacto, éstas están expuestas al desgaste, motivo por el cual son endurecidas mediante tratamientos térmicos de endurecimiento superficial como es el caso del cementado de los aceros. A los efectos de evitar el desgaste, el engrane está continuamente lubricado, lo que además lo refrigera, favoreciendo la transmisión del movimiento a elevada velocidad.

Los engranajes son construidos mediante el fresado o tallado, de acuerdo a normas específicas. Para el cálculo de las dimensiones, resistencia y características se debe conocer previamente: *a)* distancia entre los ejes de las ruedas dentadas, *b)* número de vueltas por minuto de la rueda motora, *c)* relación de transmisión y *d)* fuerza tangencial que se debe transmitir.

Clasificación de los engranajes

Según como los engranajes interactúen entre sí, se los puede clasificar como:

a) Engranajes de acción directa: formados por dos o más ruedas que engranan entre sí, directamente una con otra, como es el caso de la figura (Fig.4.1).

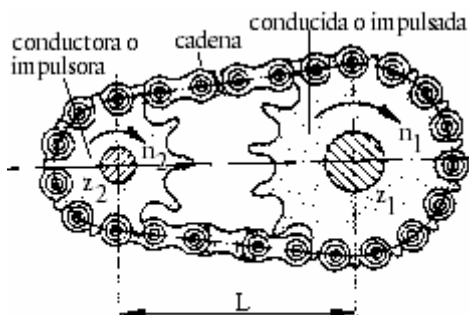


Fig.4.2

b) Engranajes de acción indirecta: cuando accionan uno sobre otro a través de un vínculo intermedio o auxiliar, como es el caso de los engranajes a cadena que se muestra en la figura (Fig.4.2), donde  $z_1$  es la rueda conductora o motora, la cual se encuentra montada sobre un eje motor y transmite el movimiento a la rueda conducida  $z_2$  a través de la cadena. Caso de las bicicletas, donde la rueda de menor diámetro se denomina generalmente *piñón*.

A su vez, los engranajes de acción directa, según sean las posiciones de sus ejes, pueden presentar los siguientes casos: 1- sus ejes son paralelos; 2- sus ejes se cortan; 3- sus ejes se cruzan; 4- engranajes de rueda y tornillo sinfin.

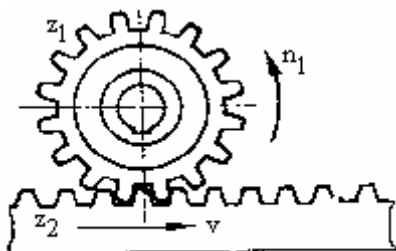
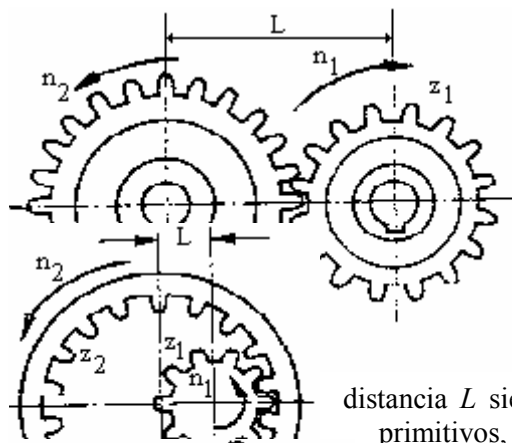


Fig.4.3

**1- Ruedas de ejes paralelos** : se presenta para ruedas cilíndricas que están montadas sobre ejes paralelos,

pudiendo presentarse distintos casos, según se muestran a continuación:



En la (Fig.4.3) se tiene una rueda o piñón  $z_1$  que engrana con una cremallera  $z_2$ , siendo esta última una rueda dentada de radio infinito, por lo tanto el número de dientes que tendrá es infinito, por lo que se utiliza una porción de la misma, de acuerdo al recorrido o desplazamiento que se quiera obtener. Los ejes sobre los cuales están montados ambos son paralelos. Para una velocidad angular  $n_1$  le corresponderá para la cremallera una velocidad  $v$  de desplazamiento.

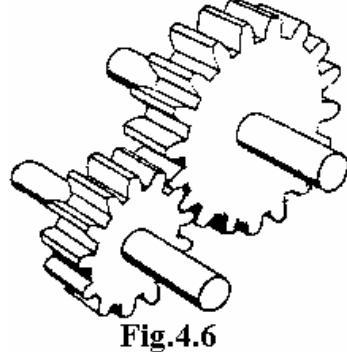


Fig.4.6

En la figuras (Fig.4.6), observar engranajes de ejes helicoidales y en V

En la (Fig.4.4) se presentan dos engranajes montados sobre los ejes paralelos dispuestos a una distancia  $L$  siendo ésta de igual medida a la suma de sus radios primitivos, de engrane exterior, pudiendo tener dientes rectos, helicoidales o en V.

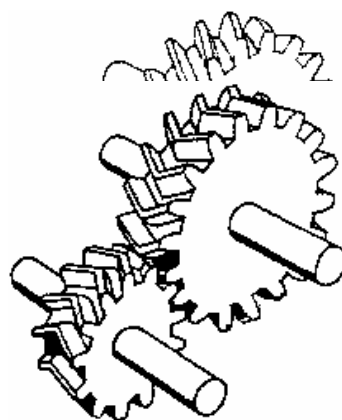


Fig.4.8

En la (Fig.4.5) se observan dos ruedas de engrane interior, una de las cuales, la de menor diámetro que se encuentra dentro de la de mayor diámetro, tiene dentado exterior, en tanto que la exterior cuenta con dientes interiores. La distancia  $L$  entre los ejes es igual a la diferencia de sus radios primitivos.

(Fig.4.7) y (Fig.4.8) se puede paralelos, de dientes rectos, respectivamente.

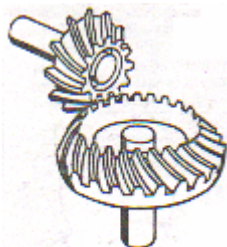


Fig.4.10

**2- Ruedas cuyos ejes se cortan:** este caso se presenta en los engranajes cónicos, los que están contruidos de tal modo que si sus ejes se prolongaran, ellos se encontrarán en un punto o vértice común. Sus dientes pueden ser rectos, en arco o en espiral, respondiendo en cada caso a determinadas condiciones de trabajo y trazado. En la figura (Fig.4.9) se observa un engranaje cónico de dientes rectos y en la figura (Fig.4.10) un engranaje cónico de dientes en espiral.

respectivamente, al figura (Fig.4.11a)  $\alpha$  obtiene un cambio movimiento de al original; figura cambio se produce figura (Fig.4.11c)  $\alpha$  cambia en un

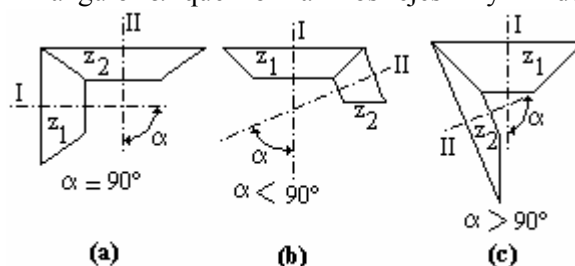


Fig.4.11

El ángulo  $\alpha$  que forman los ejes I y II de los engranajes  $z_1$  y  $z_2$  cortarse puede ser:  $= 90^\circ$ , con lo que se en la transmisión del rotación perpendicular (Fig.4.11b)  $\alpha < 90^\circ$  el en ángulo agudo y  $> 90^\circ$  la dirección ángulo obtuso.

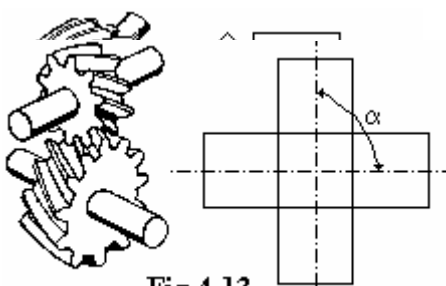


Fig.4.13

**3- Ruedas cuyos ejes se cruzan en el espacio:** son engranajes cilíndricos de dientes helicoidales cuyos ejes se cruzan en el espacio, lo que permite lograr el cambio

de dirección de la transmisión del movimiento. Los ejes pueden cruzarse en forma oblicua (Fig.4.12), formando un ángulo  $\alpha$  menor a  $90^\circ$  o en forma perpendicular (Fig.4.13), donde es  $\alpha$  igual a  $90^\circ$ . Estos engranajes son de dientes helicoidales.

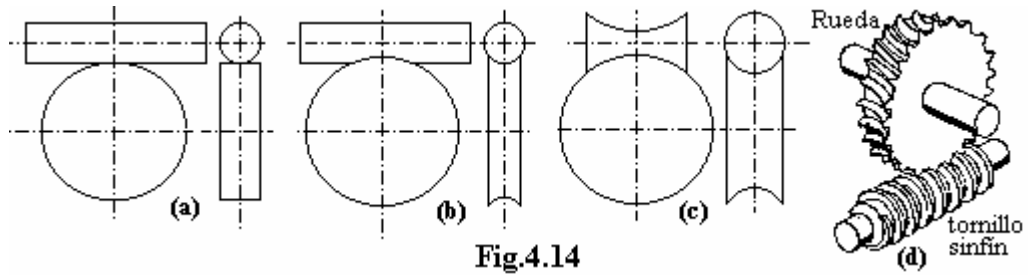


Fig.4.14

**4- Engranajes de rueda y tornillo sinfin:** se pueden presentar tres casos, según sea el perfil de los dientes y filete que presenta la rueda y el tornillo sinfin respectivamente, los cuales se indican esquemáticamente en la figura: en la (Fig.4.14a) se tiene ambos de perfiles cilíndricos, la (Fig.4.14b) muestra la rueda de perfil globoide y el tornillo sinfin cilíndrico, y en la (Fig.4.14c) tanto la rueda como el tornillo sinfin presentan perfiles globoides. La (Fig.4.14d) muestra como engranan una rueda de perfil globoide y un tornillo sinfin cilíndrico.

Elementos de los engranajes cilíndricos de dientes rectos. Notación

Cuando dos engranajes engranan entre sí, el contacto que hacen los dientes de ambos se realiza

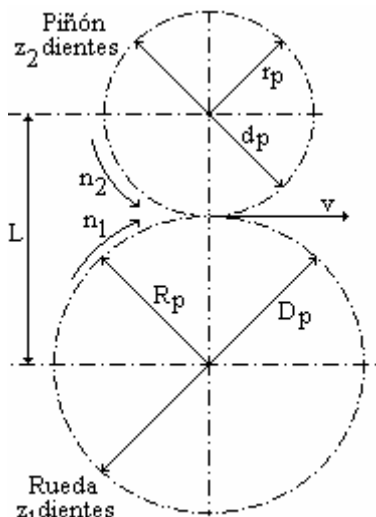


Fig.4.15

en la línea que marca el perímetro de la superficie de dos cilindros lisos ideales, pertenecientes a cada uno de ellos, que se transmiten por fricción el movimiento de rotación de sus ejes sin deslizar uno sobre otro, denominados *cilindros primitivos*, constituyendo la circunferencia de cada superficie, la *circunferencia primitiva* de los engranajes. Los distintos parámetros de un engranaje y el cálculo de los mismos están referidos a su circunferencia primitiva. Por lo general se denomina al engranaje de mayor diámetro *rueda* y al de menor diámetro *piñón*. A continuación se ilustra la terminología básica más usada de los distintos elementos que componen un engranaje, mostrándose en las figuras que siguen los mismos. En la figura (Fig.4.15) se indican las circunferencias primitivas del piñón y de la rueda, cuyos ejes  $O_1$  y  $O_2$  están separados la distancia  $L$ . En ella se observan además, los diámetros primitivos  $D_p$  de la rueda y  $d_p$  del piñón y sus radios primitivos  $R_p$  y  $r_p$  respectivamente; se indica con  $n_1$  el número de vueltas por minuto con que gira la rueda y con  $n_2$  con la que gira el piñón, siendo  $z_1$  y  $z_2$  el número de dientes de cada uno de ellos respectivamente;  $v$  es la velocidad tangencial del punto de contacto de los dientes. En la figura (Fig.4.16) se muestran dos dientes de la rueda, en la que se notan:

- **Paso Circunferencial  $p_c$ :** es la distancia entre dos puntos homólogos de dos dientes consecutivos, medido sobre la circunferencia primitiva, siendo igual para la rueda y para el piñón, denominándose en este caso, *ruedas homólogas*, siendo por lo tanto:

- **Paso Circunferencial  $p_c$ :** es la distancia entre dos puntos homólogos de dos dientes consecutivos, medido sobre la circunferencia primitiva, siendo igual para la rueda y para el piñón, denominándose en este caso, *ruedas homólogas*, siendo por lo tanto:

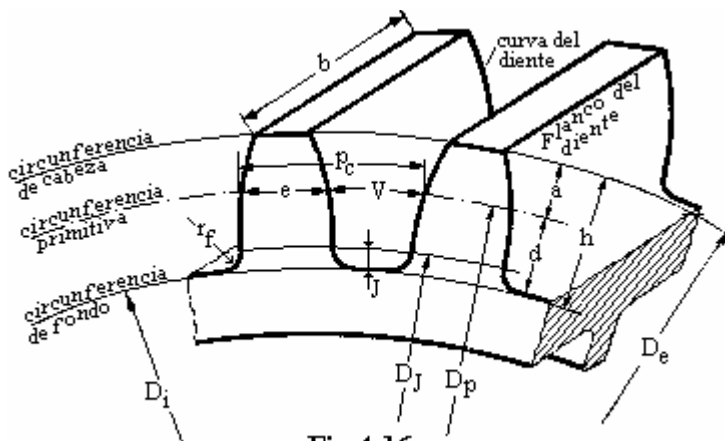


Fig.4.16

$$p_c = \frac{\pi D_p}{z_1} = \frac{\pi d_p}{z_2}$$

(4.1)

El paso circunferencial  $p_c$  se lo obtiene dividiendo, en tantas partes como dientes tenga la

rueda o piñón, la circunferencia primitiva.

- **Paso Diametral en pulgadas (Diametral Pitch)  $p_d$**  : es el número de dientes que tiene un engranaje por cada pulgada del diámetro primitivo:

$$p_d = \frac{z_1}{D_p} = \frac{z_2}{d_p} \quad (4.2)$$

En la (4.1) pasando  $D_p$  y  $d_p$  al denominador se obtiene:

$$p_c = \frac{\pi}{\frac{z_1}{D_p}} = \frac{\pi}{\frac{z_2}{d_p}} = \frac{\pi}{p_d} \quad (4.3)$$

(4.3)

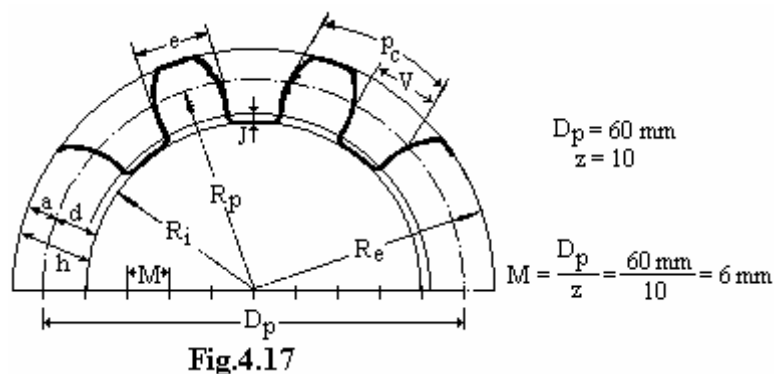


Fig.4.17

- **Módulo o Paso Diametral**

**M**: siendo  $p_c$  un número irracional por contener su determinación el número irracional  $\pi$ , lo serán también todas las dimensiones del engranaje que son función del paso circular, por lo que para resolver este inconveniente se divide ambos miembros de la (4.1)

por  $\pi$ , obteniéndose el módulo  $M$ , el cual se toma como base de cálculo de los engranajes, resultando:

$$M = \frac{p_c}{\pi} = \frac{D_p}{z_1} = \frac{d_p}{z_2} \quad (4.4)$$

(4.4)

Es decir que para que dos engranajes puedan engranar entre sí, sus módulos deben ser iguales.

En la figura (Fig.4.17) se observa, para un engranaje cualquiera, con número de dientes  $z = 10$  y  $D_p = 60$  mm, es el módulo  $M = 6$  mm.

- **Circunferencia de fondo (interior) o de raíz**, es la circunferencia cuyo diámetro es  $D_i$  (Fig.4.16), y su radio es  $R_i$  (Fig.4.17) y corresponde al cilindro en el cual se encuentra arraigado el diente.

- **Circunferencia de cabeza o exterior**, es la circunferencia descrita por la cabeza de los dientes, de diámetro  $D_e$  (Fig.4.16) y radio  $R_e$  (Fig.4.17).

- **Circunferencia primitiva**, es la circunferencia de contacto de los cilindros primitivos.

- **Altura de cabeza del diente o adendo**: es la altura radial  $a$  del diente (Fig.4.17), medida entre la circunferencia primitiva y la circunferencia de cabeza o exterior.

- **Altura del pie del diente o dedendo**: es la altura radial  $d$  del diente (Fig.4.17), medida entre la circunferencia primitiva y la circunferencia de raíz.

- **Altura del diente**: es la suma  $h$  de la altura de cabeza y la del pie del diente (Fig.4.17):

$$h = a + d \quad (4.5)$$

(4.5)

- **Espesor del diente**: es el grueso  $e$  de un diente (Fig.4.17), medido sobre la circunferencia primitiva. Se lo toma generalmente como la mitad del paso circular.

$$e = \frac{p_c}{2} \quad (4.6)$$

(4.6)

O reemplazando en la (4.6) el valor de  $p_c$  dado por la (4.3):

$$e = \frac{\pi}{2p_d}$$

(4.7)

- **Vacío o hueco del diente:** es el hueco  $V$  entre dos dientes consecutivos, en el cual penetra el diente de la otra rueda que engrana con ésta. Teóricamente es igual al espesor, pero en la ejecución práctica de un engranaje, a los efectos de evitar el calentamiento por rozamiento y a las inexactitudes, tanto en la construcción como en el montaje, que siempre se tiene en forma no deseable pero inevitable, es mayor ya que presenta un juego tangencial o lateral, siendo este juego restado del espesor y sumado al vacío del diente.

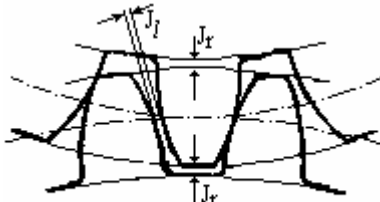


Fig.4.18

- **Juego radial o de fondo y Juego lateral o tangencial del diente:** también llamados **holguras del diente**, son los espacios  $J_r$  y  $J_l$  respectivamente que quedan, el primero entre la cabeza del diente de una de las ruedas y la circunferencia de raíz de la otra a efectos de evitar la presión que pueda

producir el contacto entre ambos, y el segundo entre los perfiles de los dientes como ya se dijera en el punto anterior y además para permitir la deflexión de los mismos, permitir la lubricación y la dilatación térmica, cuando están engranando entre sí (Fig.4.18).

#### Relaciones fundamentales de ruedas cilíndricas de dientes rectos

Analizando la figura ya vista (Fig.4.15), de la misma resulta que las velocidades angulares  $\omega_1$  y  $\omega_2$  en radianes sobre segundo, en función de  $n_1$  y  $n_2$ , están dadas por las expresiones:

$$a) \omega_1 = 2\pi n_1 \quad \text{y} \quad b) \omega_2 = 2\pi n_2$$

(4.8)

La relación de transmisión del movimiento,  $i$ , se define como el cociente entre las velocidades angulares  $\omega_1$  de la rueda motora y  $\omega_2$  de la rueda conducida:

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{2\pi n_1}{2\pi n_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

(4.9)

Por ser  $v_1 = v_2 = v$  y además, por ser  $v = R\omega$ , por la (4.8) se tiene:

$$a) v_1 = \frac{\pi D_p n_1}{60} \quad \text{y} \quad b) v_2 = \frac{\pi d_p n_2}{60}$$

(4.10)

es:

$$\frac{\pi D_p n_1}{60} = \frac{\pi d_p n_2}{60}$$

(4.11)

De la (4.11), haciendo pasajes de términos, y por ser  $D_p = 2R_p$  y  $d_p = 2r_p$ , resulta:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{d_p}{D_p} = \frac{r_p}{R_p}$$

(4.12)

De la (4.4), haciendo pasajes de términos se obtiene:

$$\frac{d_p}{D_p} = \frac{r_p}{R_p} = \frac{z_2}{z_1}$$

(4.13)

Por lo tanto, de las expresiones (4.9), (4.12) y (4.13) se obtiene una expresión generalizada para la relación de transmisión:

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{d_p}{D_p} = \frac{r_p}{R_p} = \frac{z_2}{z_1}$$

(4.14)

De la (4.14) se pueden obtener los valores de cada parámetro en función del resto de los otros haciendo pasajes de términos, así se obtienen, por ejemplo

$$\text{a) } n_1 = n_2 \frac{d_p}{D_p} = n_2 \frac{r_p}{R_p} = n_2 \frac{z_2}{z_1} \quad \text{o} \quad \text{b) } z_1 = z_2 \frac{n_2}{n_1} = z_2 \frac{D_p}{d_p} = z_2 \frac{R_p}{r_p}$$

(4.15)

La distancia  $L$  entre ejes de los engranajes es:

$$L = \frac{D_p + d_p}{2} = R_p + r_p$$

(4.16)

Además, de la (4.13) o (4.14) se obtiene, haciendo pasajes de términos:

$$R_p = r_p \frac{z_1}{z_2}$$

(4.17)

Por lo tanto, la (4.16) se puede escribir como:

$$L = r_p \frac{z_1}{z_2} + r_p = r_p \left( \frac{z_1}{z_2} + 1 \right)$$

(4.18)

Si de la (4.18) se despeja  $r_p$ :

$$\text{a) } r_p = \frac{L}{1 + \frac{z_1}{z_2}} = \frac{L}{1 + \frac{n_2}{n_1}} \quad \text{o} \quad \text{b) } d_p = 2 \frac{L}{1 + \frac{z_1}{z_2}} = 2 \frac{L}{1 + \frac{n_2}{n_1}}$$

(4.19)

O también:

$$\text{a) } R_p = \frac{L}{1 + \frac{z_2}{z_1}} = \frac{L}{1 + \frac{n_1}{n_2}} \quad \text{o} \quad \text{b) } D_p = 2 \frac{L}{1 + \frac{z_2}{z_1}} = 2 \frac{L}{1 + \frac{n_1}{n_2}}$$

(4.20)

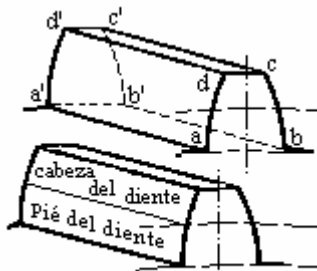


Fig.4.19

### Forma de los dientes

Para engranajes cilíndricos, por lo general el perfil de los dientes es de forma prismática cilíndrica. La forma de las caras anterior  $abcd$  y posterior  $a'b'c'd'$  (Fig.4.19), son simétricas respecto del radio que pasa por el punto medio del arco comprendido entre las curvas del diente  $ad$  y  $bc$  en la cara anterior y  $a'd'$  y  $b'c'$  en la cara posterior, tomado sobre la circunferencia primitiva de la rueda.

### Engranajes homólogos

Dos o más ruedas dentadas son homólogas cuando ellas pueden engranar entre sí. Para ello deben tener igual paso circunferencial  $p_c$  y por consiguiente, igual módulo  $M$ . En la figura (Fig.4.15) ambos engranajes son homólogos, siendo las dimensiones de los dientes iguales, variando únicamente los diámetros de raíz, primitivos y de cabeza y por lo tanto el número de dientes.

### Perfil del diente

El trazado del perfil del diente es de suma importancia, ya que de ello dependerá que no existan choques o contactos bruscos entre los engranajes. A los efectos de evitar la arbitrariedad en la construcción del perfil del diente, ya que podrían existir un número muy grande de formas, lo cual resultaría antieconómico y muy poco práctico, se han establecido curvas sencillas de ejecutar técnicamente, como son las *Curvas Cíclicas*, las que generan perfiles de dientes: a) *Cicloidales*, que a su vez pueden ser: 1- *Cicloide*: curva engendrada por un punto de un círculo que rueda sin resbalar sobre una recta fija; 2- *Epicicloide*: curva engendrada por un punto de un círculo que rueda sin resbalar, apoyado exteriormente sobre una circunferencia de mayor diámetro que está fija; 3- *Hipocicloide*: curva engendrada por un punto de un círculo que gira sin resbalar, apoyado interiormente sobre una circunferencia que está fija; 4- *Pericicloide*: curva engendrada por el punto de una circunferencia que rueda sin resbalar sobre un círculo fijo interior a ella, ambos en un mismo plano; b) *Evolvente de círculo*, que es una curva engendrada por el punto de una recta que gira sin resbalar sobre una circunferencia que está fija.

Si bien con las curvas cicloidales se obtienen perfiles más exactos, de menores rozamientos, desgaste y choques de los dientes, estas ventajas pueden existir únicamente cuando la distancia entre los centros de los engranajes se mantienen rigurosamente. Con la evolvente de círculo, el perfil obtenido es más simple y fácil de ejecutar, no exigiendo además mantener la distancia entre ejes invariable para que el engrane se realice en buenas condiciones. Actualmente el trazado del perfil de los dientes no es tan importante como antes, ya que son obtenidos mediante fresado o tallado.

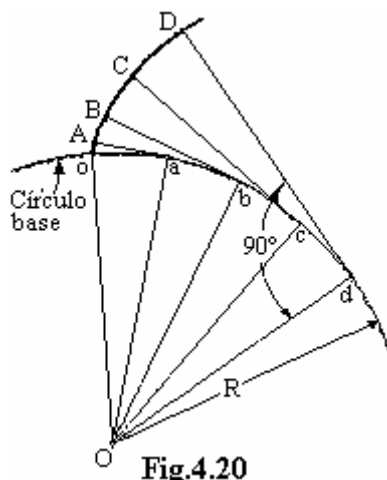


Fig.4.20

Para el trazado práctico de la evolvente de círculo (Fig.4.20) se procede de la siguiente forma: se traza con radio cualquiera  $R$  y centro en  $O$  la circunferencia base, de la cual se toma un determinado arco. A partir de un punto inicial  $o$  sobre este arco se efectúan divisiones con los puntos  $a, b, c$  y  $d$  a partir de los cuales se trazan los radios  $Oo, Oa, Ob, Oc$  y  $Od$ . Se trazan las rectas perpendiculares a estos radios:  $aA, bB, cC$  y  $dD$ . Haciendo centro sucesivamente en  $a, b, c$  y  $d$ , con radios  $oa, ba, cb$  y  $dc$  respectivamente, se trazan los arcos  $oA, AB, BC$  y  $CD$ , resultando con aproximación suficiente la curva  $oABCD$  la evolvente del círculo. Con esta curva se está en condiciones de trazar el perfil del diente a evolvente de círculo.

### Trazado práctico del perfil del diente de evolvente de círculo

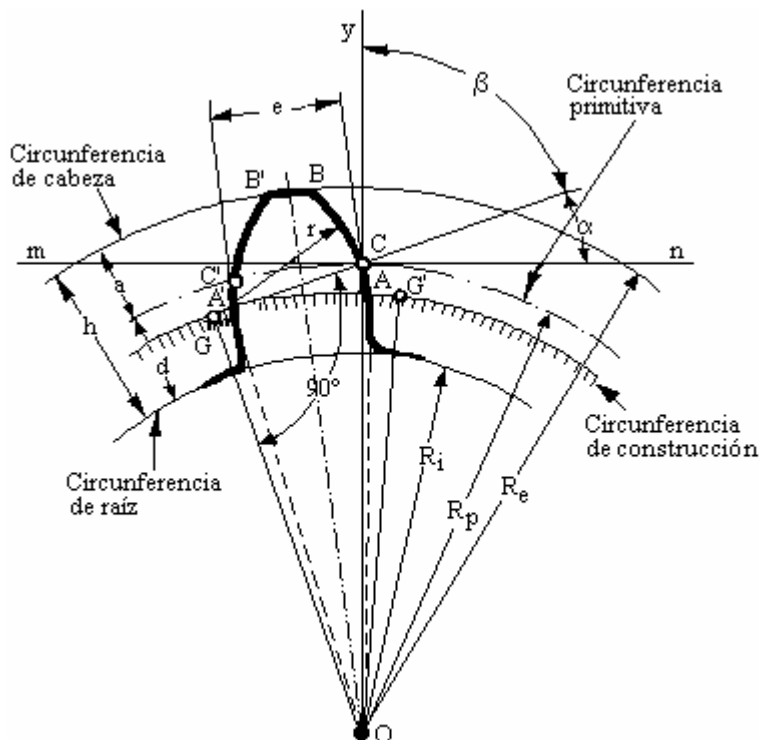


Fig.4.21

Para efectuar el dibujo de un engranaje, el cual no exige una gran exactitud, se procede de la siguiente manera (Fig.4.21): tomando el engranaje cuya circunferencia primitiva tiene radio  $R_p = OC$  y centro el punto  $O$ ; se conocen las alturas  $a$  y  $d$  de la cabeza y del pié del diente respectivamente, lo que permite trazar las circunferencias de cabeza de radio  $R_e$  y la de raíz de radio  $R_i$ . Se traza la recta  $Oy$  y la recta  $m-n$  perpendicular a la primera, la que es tangente a la circunferencia primitiva en el punto  $C$ . Por este punto se traza una recta tangente en el punto  $G$  a la circunferencia de radio  $OG$ , que es la circunferencia base o de

construcción para el perfil a evolvente de círculo, la cual recibe el nombre de *recta de presiones* y que forma un ángulo comprendido entre  $15^\circ$  y  $25^\circ$  con la  $m-n$ , el cual dependerá del número de dientes del engranaje. Haciendo centro en  $G$ , si se traza el arco  $ACB$  con radio  $GC$  limitado por la circunferencia de cabeza y la de base, el mismo resulta casi coincidente con la evolvente de círculo que correspondería al punto  $A$  que está sobre dicha circunferencia. Este arco  $ACB$  es parte del perfil del diente, el cual se completa trazando el radio  $OA$ . El perfil por debajo del punto  $A$  no es afectado, según la experiencia, por el engrane de las ruedas que engranarían con la del trazado, motivo por el cual se puede terminar redondeándolo a voluntad en el entalle para evitar la concentración de tensiones en el ángulo vivo, reforzando al mismo tiempo la base del diente.

La línea de engrane es coincidente con la prolongación de la recta  $GC$  para los dientes de perfil a evolvente de círculo y además con la recta de acción de la dirección del empuje o presión que le ejerce el diente del otro engranaje que engrana con ella.

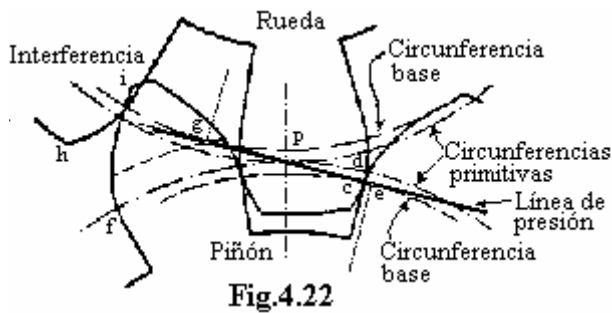
Una vez que se obtuvo el perfil de uno de los flancos del diente, el otro se traza en forma simétrica. Determinando el punto  $C'$ , ya que se conoce el espesor  $e$  del diente sobre la circunferencia primitiva dado por la (4.6), con radio  $GC$  y centro en  $C'$  se corta la circunferencia de construcción en el punto  $G'$ . Con centro en  $G'$  y radio  $G'C'$  se traza el arco  $A'C'B'$  con lo que se construye el otro flanco del diente, de igual forma que el del lado opuesto. Se puede además trazar el eje de simetría del diente que pasa por el punto medio del arco  $CC'$ .

Para construir todos los dientes se divide la circunferencia primitiva en el doble de partes como dientes tiene, o sea  $2z$  partes, estando todos los centros de los arcos de evolvente ( $G, G', etc.$ ) sobre la circunferencia de base.

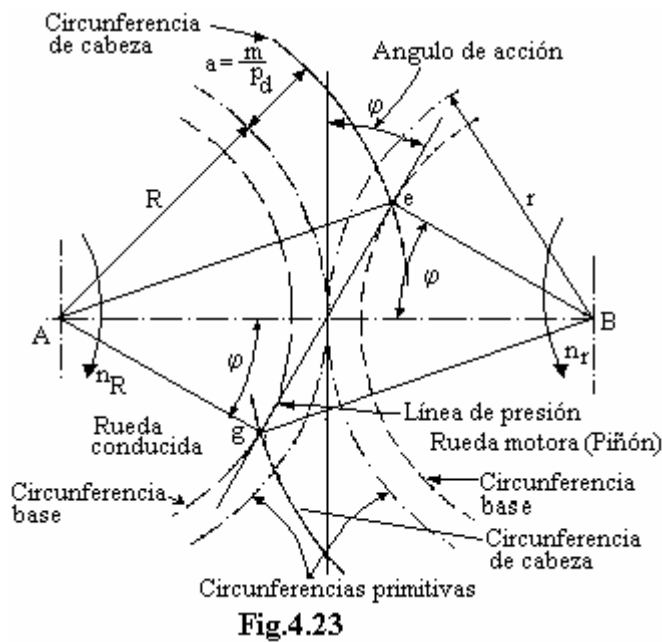
### Interferencia en los engranajes de evolvente



La evolvente no puede introducirse dentro de la circunferencia base de la cual es generada. Si el piñón gira en el sentido contrario a las agujas del reloj según se indica en la figura (Fig.4.22), el primer contacto entre los perfiles de los dientes se hace en *e* y el último punto de contacto en *g*,



donde la línea de presión es tangente a las circunferencias bases. Si el perfil del diente del piñón se extiende más allá de un arco de circunferencia trazado por *g* interferirá en *i*, según se observa en la figura, con la parte radial de la rueda (de mayor diámetro), solamente evitable si se rebaja el flanco del diente del piñón. Esta interferencia limita la altura de la cabeza del diente, y a medida que el diámetro del piñón se hace más chico, la longitud permitida de la cabeza del diente de la rueda se hace más pequeña. Para que dos engranajes engranen sin interferencia, el contacto entre sus dientes debe realizarse dentro de los límites *g-e* de la línea de presión.



En la figura (Fig.4.23) se observa que para actuar sin interferencia, el punto más alejado del engranaje conducido *A* (rueda) debe pasar por el punto *e*, que pertenece al diámetro límite de la circunferencia de adendo del engrane, ya que si fuera mayor, el contacto se realizaría fuera de los límites *g-e* ya mencionados introduciéndose dentro de la circunferencia base.

Analizada geoméricamente la figura (Fig.4.23), el diámetro máximo exterior *Ae*, de la cabeza del diente o

adendo, del engranaje conducido *A* (rueda) está dado por la expresión:

$$Ae = R + a = \sqrt{(Ag)^2 + (ge)^2} = \sqrt{R^2 \cos^2 \varphi + (R + r)^2 \sin^2 \varphi} \quad (4.21)$$

Si se denomina  $z_R$  y  $z_r$  al número de dientes de la rueda y del piñón respectivamente, siendo  $p_d$  el paso diametral dado por la (4.2), se obtiene:

$$a) \quad R = \frac{z_R}{2p_d} \quad y \quad b) \quad r = \frac{z_r}{2p_d} \quad (4.22)$$

Si además se pone en función del paso diametral y de un coeficiente *m*, el cual depende de las proporciones elegidas entre las dimensiones del diente y el paso diametral, el valor del adendo *a*, resulta:

$$a = \frac{m}{P_d} \quad (4.23)$$

El coeficiente *m* depende de la norma con que se dimensione el diente. Para engranes de profundidad completa en la norma americana, es  $m = 1$ ; para dientes chatos es  $m = 0,8$ . Existen

tablas que dan las proporciones de los dientes en función del ángulo de presión, del paso diametral y del paso circular. Si en la expresión (4.21) se reemplazan  $R$ ,  $r$  y  $a$  por sus valores dados por la (4.22) y (4.23) y operando se obtiene:

$$z_r^2 + 2z_r z_R = \frac{4m(z_R + m)}{\text{sen}^2 \varphi} \tag{4.24}$$

Para un piñón de  $z_r$  dientes y una cremallera  $z_R = \infty$  la (4.24) se reduce a:

$$z_r = \frac{2m}{\text{sen}^2 \varphi} \tag{4.25}$$

Para una relación conocida de  $m$  y conociendo el ángulo de presión  $\alpha$ , con las expresiones (4.24) y (4.25) se puede obtener el número mínimo de dientes  $z_r$  del piñón que puede engranar con una rueda de  $z_R$  dientes, sin interferencia entre ambos. Para el mismo piñón de  $z_r$  dientes, solo podrán engranar con él ruedas de menor número de dientes que  $z_R$ , ya que para ruedas de mayor cantidad de dientes habrá interferencia.

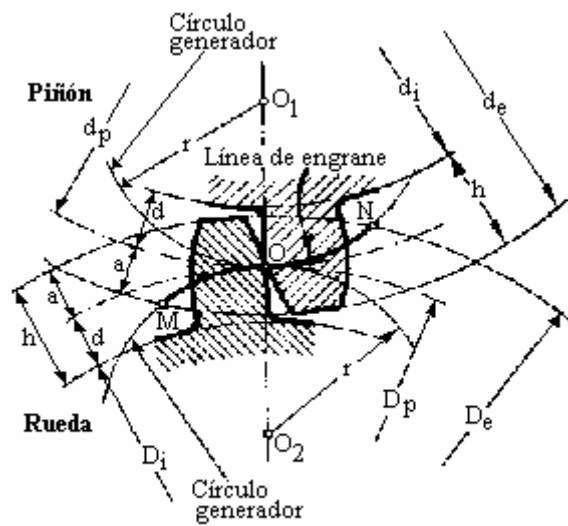


Fig.4.24

**Línea de engrane**

La *línea de engrane* es el lugar geométrico formado por todos los puntos de contacto de dos dientes durante el giro de las ruedas que engranan entre sí. Para que el contacto entre los dientes sea continuo y no existan choques, la longitud de la línea de engrane debe ser mayor que la longitud del arco correspondiente al paso circunferencial. La línea de engrane se encuentra limitada por las circunferencias exteriores. En la figura (Fig.4.24) se observa, además de distintos parámetros de los engranajes, la línea de engrane de un engranaje con dientes de perfil cicloidal, siendo ésta la formada por los arcos de curvas MON pertenecientes a los círculos generadores de radio  $r$ , y limitada por las circunferencias de cabeza.

**Duración del engrane o relación de contacto**

La *duración del engrane* es la relación existente entre el largo de la línea de engrane y el largo del arco del paso circunferencial. Para que exista siempre un diente engranando con otro, esta relación debe ser mayor que 1. Por lo general debe ser:

$$\frac{\text{Longitud de la línea de engrane}}{\text{Longitud del paso circunferencial}} = 1,25 \text{ a } 1,50$$

Se procura hacer esta relación lo más elevada posible para repartir la carga que se transmitirá sobre el mayor número de dientes.

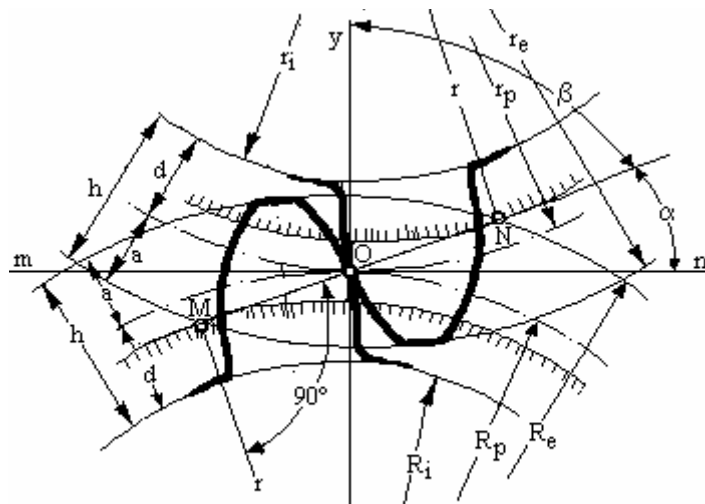
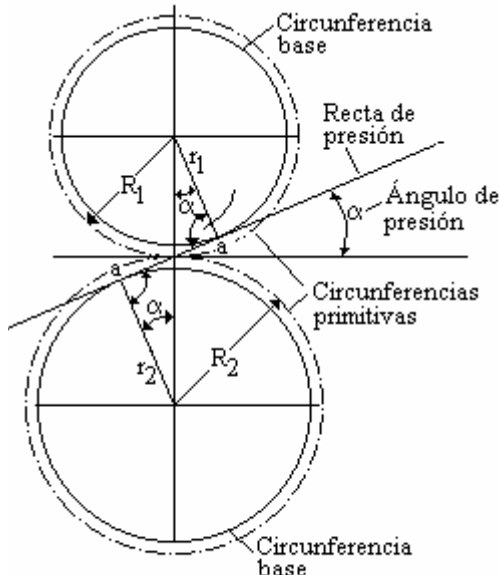


Fig.4.25

Cuanto menor sea el número de dientes de una rueda, se debe tratar de lograr una mayor duración del engrane. Por ejemplo, para piñones de 15 dientes y cremalleras se adopta de 1,64 a 2,12.

**Línea de engrane de dientes de perfiles a evolvente de círculo**

La línea de engrane de perfiles a evolvente de círculo es una línea recta que coincide con la recta de presiones, según lo ya visto precedentemente, y que resulta tangente a las circunferencias de construcción de ambos engranajes, limitada por las circunferencias de cabeza. En la figura (Fig.4.25) se puede observar la línea de engrane formada por el segmento *MON* para dos engranajes limitado por las circunferencias de cabezas, coincidiendo estos límites, para este caso especial, con los puntos tangentes a la circunferencia de construcción.



**Fig.4.26**

**Ángulo de presión**

El ángulo  $\alpha$  (Fig.4.26) que forma la recta de presiones con la horizontal tangente a las circunferencias primitivas, se denomina *ángulo de presión*. Los valores de este ángulo están en función del número de dientes y se los ha obtenido de grado en grado, estando tabulados. Algunos de los valores del ángulo de presión, según el número de dientes son los siguientes:

Nº de dientes	Ángulo	Nº de dientes	Ángulo
8	25°	20	17° 30'
10	22° 30'	25	15°
15	20°	30	14° 30'

La relación que liga los distintos parámetros indicados en la figura (Fig.4.26), es decir a  $r$ ,  $R$ , y  $\alpha$  es la siguiente:

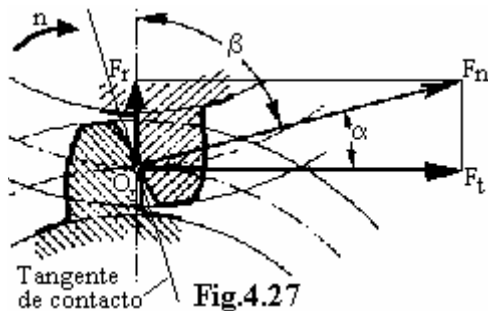
$$(4.26) \quad r_1 = R_1 \cos \alpha$$

$$(4.27) \quad r_2 = R_2 \cos \alpha$$

Siendo  $r_1$  y  $r_2$  los radios de la circunferencias bases,  $R_1$  y  $R_2$  los radios de las circunferencias primitivas y  $\alpha$  el ángulo de presión.

**Fuerzas sobre el diente**

En el engrane de dos engranajes cilíndricos (Fig.4.27), o engranaje y cremallera (Fig.4.28), si bien están en contacto por lo general dos o tres dientes, se considera que la fuerza ejercida por la rueda motora sobre la conducida se realiza a través de un solo diente. Esta fuerza  $F_n$  tiene la dirección de la recta de presión, formando el ángulo  $\alpha$  con la tangente a las circunferencias primitivas y está aplicada en el punto  $O$  de contacto de ambos dientes.



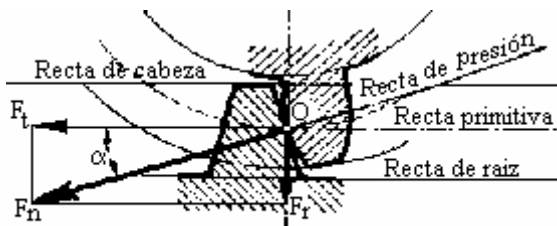
**Fig.4.27**

La misma puede descomponerse por lo general en tres componentes, una fuerza tangencial  $F_t$ , que es la fuerza que produce el movimiento rotativo, una fuerza radial  $F_r$  y una fuerza axial  $F_a$ , soportadas ambas por los órganos de sujeción del engranaje, siendo la última de ellas nula en los engranajes rectos, como es el caso que se analiza.

Del sistema de fuerzas indicados en la figura (Fig.4.27), aplicado en el punto  $O$ ,  $F_n$  es la resultante solo de  $F_t$  y  $F_r$  para dientes rectos, siendo normal a la tangente que pasa por el punto  $O$  de contacto de los dos dientes y tiene además la dirección de la recta de presión.

La potencia transmitida tangencialmente al movimiento de giro por la rueda motora a la conducida es  $N$ , siendo  $n$  la velocidad de rotación en vueltas por minuto (rpm). Para el radio

primitivo  $R$ , la velocidad tangencial  $v$  del punto  $O$  de contacto de los dientes sobre el radio primitivo, según la (4.8) y la (4.10) resulta:



$$v = \omega.R = \frac{2\pi R n}{60} \quad (4.28)$$

La potencia  $N$  en la dirección tangencial del movimiento es:

$$N = F_t \cdot v = \frac{F_t 2\pi R n}{60}$$

(4.29)

De la (4.29) se obtiene:

$$F_t = \frac{N}{v} = \frac{60N}{2\pi R n} = 9,55 \frac{N}{R n}$$

(4.30)

Por otra parte resulta, según la figura (F.4.27):

$$a) \quad F_n = \frac{F_t}{\cos \alpha} \quad y \quad b) \quad F_r = F_t \operatorname{tg} \alpha$$

(4.31)

Por lo tanto, reemplazando en la (4.31) el valor de  $F_t$  dado por la (4.30) se obtiene:

$$a) \quad F_n = 9,55 \frac{N}{R n \cos \alpha} \quad y \quad b) \quad F_r = 9,55 \frac{N}{R n} \operatorname{tg} \alpha$$

(4.32)

El momento de rotación será:

$$M = F_r R$$

(4.33)

Para  $N$  en vatios,  $v$  en m/s y  $R$  en metros resultan  $F_t$ ,  $F_r$  y  $F_n$  en Newton y  $M$  en Newton-metro, estando sus valores dados por las expresiones anteriores. Para  $N$  en CV,  $R$  en centímetros y  $v$  en m/s resultan  $F_t$ ,  $F_r$  y  $F_n$  en kg y  $M$  en Kgcm, y las expresiones anteriores se escriben:

$$a) \quad v = \frac{2\pi R n}{60.100} \quad y \quad b) \quad N = \frac{P.v}{75}$$

(4.34)

Reemplazando el valor de  $v$  dado por la (4.34a) en la (4.34b) resulta:

$$N = \frac{P.R.n}{71620}$$

(4.35)

Y el momento de rotación:

$$M = P.R = 71620 \frac{N}{n}$$

(4.36)

Siendo:

$$(4.37) \quad \begin{aligned} \text{a) } F_t &= \frac{71620 N}{R} \frac{1}{n} & \text{b) } F_n &= \frac{71620 N}{R} \frac{1}{n \cos \alpha} & \text{c) } F_r &= \frac{71620 N}{R} \frac{1}{n} \operatorname{tg} \alpha \end{aligned}$$

**Sistemas normalizados utilizados para la fabricación de engranajes** (con perfiles a evolvente de círculo)

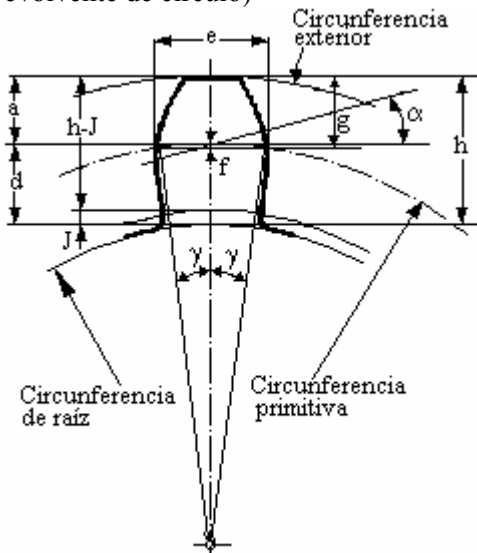


Fig.4.29

Todas las expresiones vistas son para dientes normales y de uso más generalizado. Sin embargo existen, aunque no varíen fundamentalmente el cálculo, otros sistemas desarrollados por diferentes firmas que presentan características especiales, ya sea para darle mayor resistencia al diente o lograr engranes en condiciones especiales. Debido a la gran cantidad de proporciones de dientes, y a los efectos de permitir la intercambiabilidad, se normalizaron los mismos en base a un número limitado de dientes. En los distintos países se han establecido sistemas normales para diferentes tipos de engranes, como por ejemplo la norma de la Asociación Americana de Fabricantes de Engranajes (AGMA) y Asociación Americana de Normas (ASA) en los Estados Unidos, la Comisión de Normalización Alemana (DIN), Comité de Normalización Francés (C.N.M.), especificaciones etc. Estos sistemas establecen las

relaciones entre la altura de la cabeza del diente, la altura del pie del diente, el ángulo de presión, el espesor del diente, etc. A continuación se verán los parámetros característicos de los principales sistemas, los cuales se indican en la figura (Fig.4.29) en forma genérica, dándose para cada caso particular del sistema que se mencione, el valor de cada uno de ellos, según corresponda.

### Sistema Brown - Sharpe

Por lo general este sistema está asociado al uso del sistema métrico decimal, estableciendo la proporcionalidad del engranaje en función del módulo, estando tabulados hasta el módulo 20 al que le corresponde una altura del diente de 43,32 mm. Sus parámetros principales son:

$$(4.38) \quad \text{Ángulo de presión:} \quad \alpha = 15^\circ$$

$$(4.35) \quad \text{Espesor del diente:} \quad e = \frac{1}{2} p_c = 1,57 M = V \text{ (vacío entre dientes)}$$

No presenta juego lateral en el engrane por no admitirse el mismo en todos los dientes normalizados.

$$(4.36) \quad \text{Altura de la cabeza del diente:} \quad a = M$$

$$\text{Altura del pie del diente:} \quad d = \frac{7}{6} M = 1,166 M \quad (4.37)$$

Esta altura es mayor que la de la cabeza para que exista juego entre esta última y el fondo del engranaje.

$$(4.38) \quad \text{Altura total del diente:} \quad h = a + d = 2,166 M$$

$$(4.39) \quad \text{Diámetro primitivo:} \quad D_p = z \cdot M$$

$$(4.40) \quad \text{Diámetro exterior:} \quad D_e = D_p + 2a = z \cdot M + 2M = M(z + 2)$$

Diámetro interior:  $D_i = D_p - 2d = D_p - 2 \times 1,1666M = D_p - 2,332M = M(z - 2,332)$   
(4.41)

El módulo se lo puede obtener en función del diámetro exterior y del número de dientes de la (4.40) por traspaso de términos:

Módulo:  $M = \frac{D_e}{z + 2}$   
(4.42)

Juego radial:  $J = 0,166M$   
(4.43)

Además, de la (4.37) y de la (4.43) resulta que es:

$$h - J = 2M$$

(4.44)

### **Sistema Fellows normalizado**

Este sistema utiliza el mismo valor del ángulo de presión que el usado para el cálculo normal de engranajes, según las fórmulas vistas anteriormente, pero variando la altura del diente.

Ángulo de presión:  $\alpha = 14^\circ 30'$   
(4.45)

Espesor del diente:  $e = \frac{1}{2} p_c = 1,57 M = V$  (vacío entre dientes)  
(4.46)

Altura de la cabeza del diente:  $a = M$  (4.47)

Altura del pie del diente:  $d = \frac{5}{4}M = 1,25M$   
(4.48)

Este sistema también presenta la altura del pie del diente mayor que la altura de la cabeza para que exista juego entre esta última y el fondo del engranaje.

Altura total del diente:  $h = a + d = 2,25M$   
(4.49)

Diámetro primitivo:  $D_p = z.M$   
(4.50)

Diámetro exterior:  $D_e = D_p + 2a = z.M + 2M = M(z + 2)$   
(4.51)

Diámetro interior:  $D_i = D_p - 2d = D_p - 2 \times 1,25M = z.M - 2,5M = M(z - 2,5)$   
(4.52)

El módulo  $M$  se lo puede obtener de la (4.51) en función del diámetro exterior y el número de dientes, por traspaso de términos:

Módulo:  $M = \frac{D_e}{z + 2}$   
(4.53)

Juego radial:  $J = 0,25M$   
(4.54)

Además de la (4.49) y de la (4.54) resulta ser:

$$h - J = 2M$$

(4.55)

### **Sistema Stub de dientes acortados (sin puntas)**

Este sistema, que fue utilizado por primera vez por la firma Fellows Shaper Co., y se aplica para darle menor altura al diente que uno normal, con lo que se logra su mayor robustez, fortaleciéndolo mayormente en su raíz. Utiliza dos módulos, uno mayor  $M_e$  y otro menor inmediatamente inferior  $M_h$ , en la construcción del engranaje; con el primero, el mayor, se construyen el paso, los diámetros, el espesor y número de dientes y con el segundo, el menor, solo se utiliza para determinar la altura de los dientes, resultando un módulo compuesto.

Módulos:  $M_e/M_h$   
(4.56)

Ángulo de presión:  $\alpha = 1,57M_e$   
(4.57)

Espesor del diente:  $1/2 p_c = 1,57M_e$   
(4.58)

Altura de la cabeza del diente:  $a = M_h$   
(4.59)

Altura del pié del diente:  $d = 1,20M_h$   
(4.60)

La altura del pié del diente mayor que la de cabeza permite el juego radial necesario para evitar el contacto del diente con el fondo del otro engranaje.

Altura total del diente :  $h = a + d = 2,20M_h$   
(4.61)

Diámetro primitivo:  $D_p = z.M_e$   
(4.62)

Diámetro exterior:  $D_e = D_p + 2a = z.M_e + 2M_h$   
(4.63)

Diámetro interior:  $D_i = D_p - 2d = D_p - 2 \times 1,20M_h = zM_e - 2,4M_h$   
(4.64)

Juego radial:  $J = 0,20M_h$   
(4.65)

Por la (4.61) y la (4.65) se tiene:

(4.66)  $h - J = 2M_h$

### Ruedas dentadas interiormente

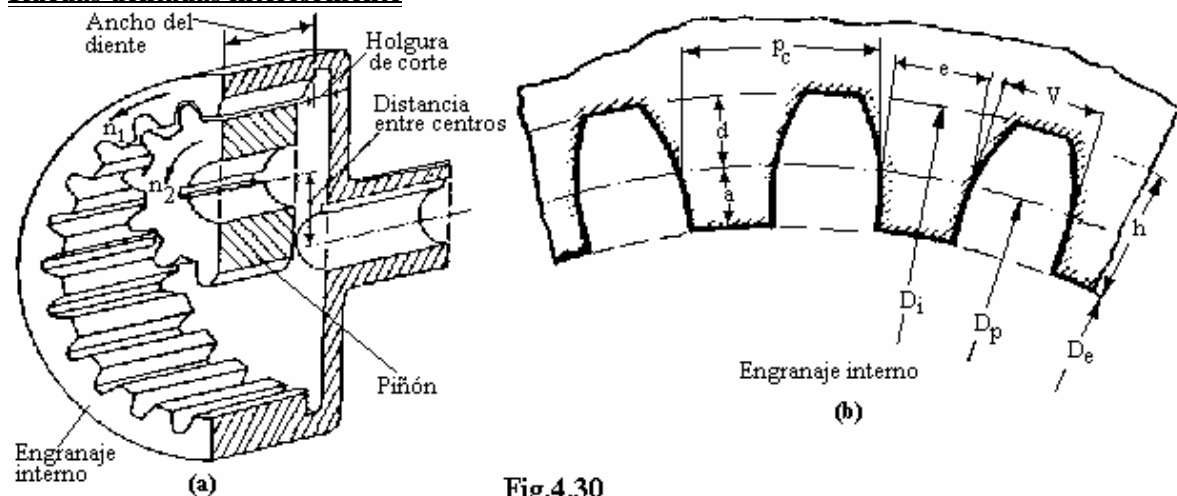


Fig.4.30

Los engranajes internos tienen los dientes tallados con la cabeza orientada hacia el interior de la rueda, como puede observarse en la figura (Fig.4.30). La forma de los dientes es igual a la forma del vacío de un engranaje externo y la altura de la cabeza se mide hacia el centro de la circunferencia primitiva. El vacío del diente es igual al perfil de un diente externo. Los engranajes internos engranan solo con piñones, o sea con engranajes externos de menor diámetro. Debe tenerse cuidado con el largo del diente a los efectos de evitar la interferencia, motivo por el cual el número de dientes del piñón está limitado a una cantidad inferior a la del engranaje interno, debiendo en casos particulares proyectarse los dientes del engranaje con un trazado especial. Para el mismo número de dientes de la rueda y el piñón, la longitud de la línea de engrane es mayor que para un engrane externo, existiendo además un mayor número de dientes en contacto. Con un engrane interno se obtiene el mismo sentido de rotación para ambas ruedas, por lo que se elimina el engranaje loco utilizado en los externos para lograrlo. Debido a

que la rueda menor o piñón se encuentra dentro de la mayor de engrane interno, está limitada la relación de transmisión.

En la figura (Fig.4.30a) se observa un engrane interno con su piñón y la descripción de las diferentes partes. La *holgura de corte* es utilizada para que pueda entrar y salir la herramienta y la rebaba en el maquinado del engranaje.

En la figura (Fig.4.30b) se indican los distintos parámetros de un engranaje interno, cuyas expresiones analíticas se muestran a continuación:

$$\text{Altura de cabeza del diente:} \quad a = M \quad (4.67)$$

$$\text{Altura de pié del diente:} \quad d = 1,166M \quad (4.68)$$

$$\text{Altura total del diente:} \quad h = 2,166M \quad (4.69)$$

$$\text{Diámetro primitivo:} \quad D_p = zM \quad (4.70)$$

$$\text{Diámetro exterior:} \quad D_e = D_p - 2a = zM - 2M = M(z - 2) \quad (4.71)$$

$$\text{Diámetro interior:} \quad D_i = D_p - 2d = zM - 2 \times 1,166M = M(z - 2,166) \quad (4.72)$$

$$\text{Juego radial:} \quad J = 0,166M \quad (4.73)$$

$$L = \frac{D_p - d_p}{2} = \frac{M}{2} (z_r - z_p)$$

$$\text{Distancia entre ejes:} \quad (4.74)$$

Siendo en la (4.74)  $d_p$  y  $z_p$  el diámetro primitivo y número de dientes del piñón con dientes exteriores.

Los demás elementos de los engranajes interiores se determinan como en los engranajes dentados exteriormente.

### Cremallera

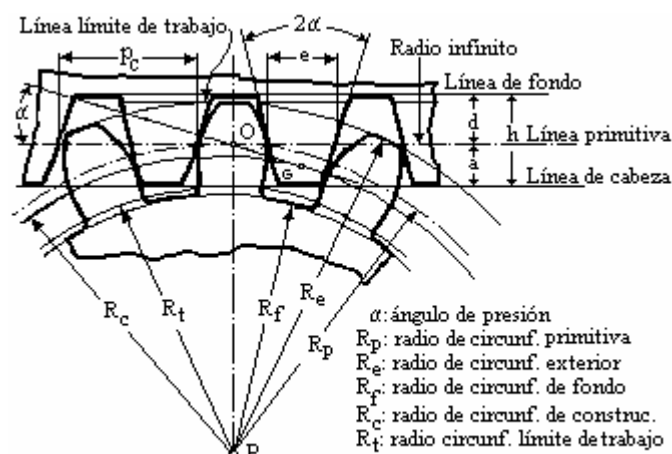


Fig.4.31

La *cremallera*, según se puede observar en la figura (Fig.4.31) es un engranaje de radio infinito, por lo que teóricamente tiene un número infinito de dientes, resultando recto el tramo que engrana con un engranaje común de radio finito, denominado generalmente piñón. Mientras el engranaje cilíndrico gira sobre su eje, la cremallera tiene un movimiento de traslación rectilíneo. Como a medida que crece el número de dientes de un engranaje, el trazado del perfil del diente a evolvente de círculo se vuelve más rectilíneo, en el límite, cuando el radio se hace infinito,

como es el caso de la cremallera, este perfil se hace recto. El ángulo de presión  $\alpha$  puede tener una inclinación de  $14,5^\circ$  o  $20^\circ$ , pudiendo los dientes ser del sistema normal o cortos, utilizándose además para el sistema Fellows dos módulos, siendo el primero para obtener el diámetro primitivo y el espesor del diente, y el segundo para el largo del diente. El flanco del diente está inclinado un ángulo  $\alpha$  respecto al eje de simetría del mismo. La cremallera y el engranaje cilíndrico que engrana entre sí deben tener el mismo módulo.

Para una cremallera normal que engrana con un piñón de  $z$  dientes se tiene:



Diámetro primitivo:  $D_p = zM$   
(4.75)

Altura de cabeza del diente:  $a = M$   
(4.76)

Altura del pié del diente:  $d = 1,166M$   
(4.77)

Paso circunferencial:  $p_c = \pi M$   
(4.78)

Espesor del diente:  $e = \frac{p_c}{2}$   
(4.79)

Juego radial:  $J_r = 0,166M$   
(4.80)

### **Cálculo de la resistencia del diente (dimensionamiento)**

Es importante dimensionar correctamente el diente a los efectos de lograr la resistencia adecuada del mismo. A los efectos de calcular los esfuerzos a que están sometidos los dientes que están interactuando en un engrane, se deben tener en cuenta diversos factores como son principalmente la cantidad de dientes en contacto simultáneos, la variación de la carga en magnitud y dirección durante el tiempo en que están en contacto, a las cargas de choques de los dientes por imperfecciones constructivas, concentración de esfuerzos en la base del diente, desgaste del diente, la geometría propia del diente, etc. Es decir que el diente experimenta esfuerzos dinámicos y cargas de desgaste.

En principio la resistencia del engranaje se calcula suponiendo al diente como si fuera una viga en voladizo, basado en la resistencia a la rotura del material sometido al esfuerzo que genera la potencia transmitida. Al respecto se aplican distintas hipótesis de cálculo, siendo alguna de ellas las siguientes:

**Primera hipótesis:** considera que la fuerza a la cual está sometido el diente es tangencial, que la misma es resistida por un solo diente y está aplicada en la circunferencia exterior sobre la cabeza del diente.

En realidad la fuerza  $F_n$  que actúa sobre el diente tiene la dirección de la recta de presión, estando la fuerza tangencial  $F_t$  dada por la expresión (4.31a):

$$F_t = F_n \cos \alpha \quad (4.31a)$$

De la (4.31a) se obtiene:

$$F_n = \frac{F_t}{\cos \alpha} \quad (4.81)$$

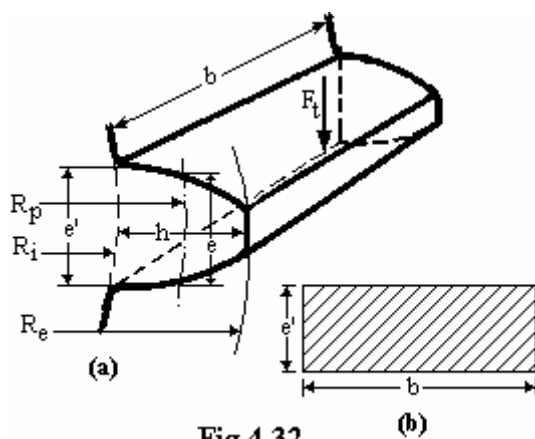
Por lo general la fuerza que actúa sobre un engranaje es resistida por dos y hasta tres dientes, lo que compensa la utilización de la fuerza tangencial  $F_t$  menor que la  $F_n$ .

La fuerza  $F_t$ , figura (Fig.4.32a) produce un momento flector dado por la expresión:

$$M_f = F_t \cdot h \quad (4.82)$$

La sección resistente  $W$  en la base del diente (Fig.4.32b) es:

$$W = \frac{b \cdot e'^2}{6} \quad (4.83)$$



**Fig.4.32**

El momento flector  $M_f$  en función de la resistencia unitaria a la flexión  $\sigma_f$  del material y de la sección resistente  $W$  es:

$$(4.84) \quad M_f = W \cdot \sigma_f$$

De las expresiones (4.82), (4.83) y (4.84) se obtiene:

$$(4.85) \quad F_t \cdot h = \frac{b \cdot e'^2}{6} \sigma_f$$

Los valores de  $e'$ ,  $b$  y  $h$  se pueden poner en función del paso circunferencial, considerando la expresión (4.6) y que en la práctica es  $e < e'$  se tendrá:

$$(4.86) \quad \frac{p_c}{2} = e' < e'$$

Por lo que la (4.86) puede escribirse de la siguiente forma:

$$(4.87) \quad e' = c \cdot p_c$$

Si se adopta  $c = 0,52$  se tendrá:

$$(4.88) \quad \text{a) } e' = 0,52 p_c \quad \text{de donde es} \quad \text{b) } e'^2 = 0,27 p_c^2$$

Así también el espesor  $b$  del diente puede escribirse:

$$(4.89) \quad b = S \cdot p_c$$

En la (4.89) se toma  $S = 2$  para dientes en bruto;  $S = 2$  a 3 para ruedas de transmisión común;  $S$  hasta 5 para transmitir fuerzas considerables.

La altura  $h$  del diente se toma:

$$(4.90) \quad h = 2,2 \frac{p_c}{\pi}$$

De la (4.1) se tiene:

$$(4.91) \quad \text{a) } p_c = \frac{2\pi R}{z} \quad \Rightarrow \quad \text{b) } R = \frac{p_c z}{2\pi}$$

Si se substituyen los valores de  $e'^2$ ,  $b$  y  $h$  dados por las (4.88b), (4.89) y (4.90) respectivamente en la expresión (4.85) se obtiene:

$$(4.92) \quad F_t \cdot 2,2 \frac{p_c}{\pi} = \frac{1}{6} S \cdot p_c \cdot 0,27 p_c^2 \sigma_f$$

Multiplicando ambos miembro de la (4.92) por la (4.91b) operando y despejando  $p_c^3$ , resulta:

$$(4.93) \quad p_c^3 = 97,7 \frac{F_t R}{z S \sigma_f} \approx 100 \frac{F_t R}{z S \sigma_f}$$

Despejando  $p_c$  de la (4.93) se tiene:

$$p_c = \sqrt[3]{\frac{100F_t R}{zS\sigma_f}} = 4,64 \sqrt[3]{\frac{F_t R}{zS\sigma_f}}$$

(4.94)

Como es el módulo, por la (4.4)  $M = \frac{P_c}{\pi}$ , la (4.94) puede escribirse:

$$M = 1,47 \sqrt[3]{\frac{F_t R}{zS\sigma_f}}$$

(4.95)

**Segunda hipótesis:** para este caso también se supone que la relación de contacto es mayor que la unidad y por lo menos dos dientes participan de la transmisión de la fuerza o potencia. En este caso la carga se considera aplicada en la generatriz primitiva. Usando el mismo razonamiento anterior se tiene que el momento aplicado a la distancia  $d$  en función de la sección resistente y la resistencia unitaria a la flexión del material del diente es:

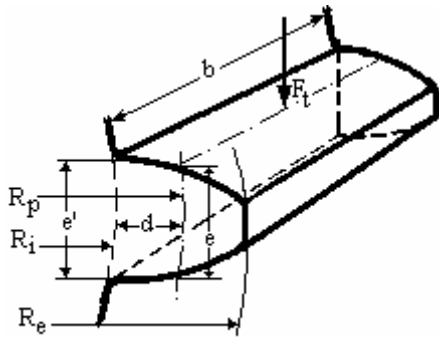


Fig.4.33

$$F_t d = \frac{e'^2 b}{6} \sigma_f$$

(4.96)

De acuerdo a las proporciones del diente, según la (4.37) se tiene:

$$d = \frac{7 p_c}{6 \pi}$$

(4.97)

Multiplicando ambos miembros de la (4.96) por la expresión (4.91b) y reemplazando en la misma los valores de  $e'$ ,  $b$  y  $d$  dadas por las expresiones (4.88b), (4.89) y (4.97) respectivamente, y operando, se obtiene:

$$p_c^3 = 51,85 \frac{F_t R}{S z \sigma_f}$$

(4.98)

Extrayendo la raíz cúbica de la (4.98) se obtiene el paso circunferencial en función de la fuerza que actúa tangencialmente sobre el diente sobre la generatriz primitiva, de las dimensiones de este último y de la resistencia del material con que está construido:

$$p_c = \sqrt[3]{51,85 \frac{F_t R}{S z \sigma_f}} = 3,72 \sqrt[3]{\frac{F_t R}{S z \sigma_f}}$$

(4.99)

En función del módulo  $M$ , la (4.99) resulta:

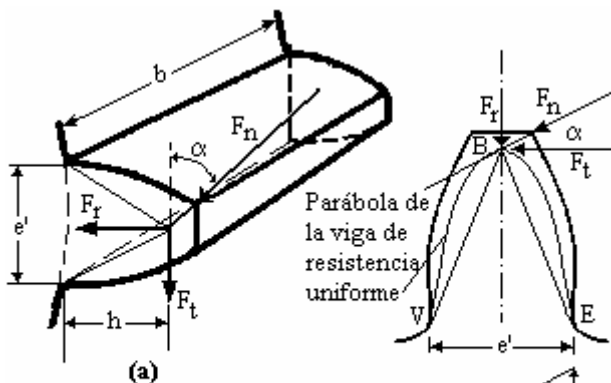


Fig-4.34

$$M = 1,19 \sqrt[3]{\frac{F_t R}{S z \sigma_f}}$$

(4.100)

**Fórmula de Lewis**

La expresión propuesta por Wilfred Lewis en 1892 supone que un solo par de dientes resiste la fuerza a transmitir, la

cual está aplicada en una arista del diente sobre la generatriz exterior del engranaje siguiendo la línea de presión, y dentro del diente se aplica sobre el eje de simetría de éste en el extremo superior del contorno de la viga en voladizo de igual resistencia de forma parabólica, cuya base tiene el mismo ancho que la base del diente, que es la que resiste la fuerza aplicada. Introduce un *factor de forma*, denominado  $y$  o  $Y$  que tiene en cuenta la geometría y proporciones del diente.

Se considera, según muestra la figura (Fig.4.34), la fuerza  $F_n$  aplicada en el extremo superior  $B$  de la viga de igual resistencia de forma parabólica, siendo esta última tangente en  $V$  y  $E$  a la base del diente. La fuerza  $F_n$  se puede descomponer en una fuerza radial  $F_r$  de compresión, que para este caso no es tenida en cuenta y en una fuerza tangencial  $F_t$  aplicada sobre el diente a la distancia  $h$ , designándose en este caso con dicha letra a la altura de la viga de igual resistencia; la fuerza  $F_t$  produce un momento flector  $M_f$ , máximo en los puntos  $V$  o  $E$ , el cual estará dado por la expresión:

$$(4.101) \quad M_f = F_t h = W\sigma_f$$

Teniendo en cuenta la (4.83) que nos da la sección resistente  $W$ , la (4.101) se escribe:

$$(4.102) \quad F_t h = \frac{e'^2 b}{6} \sigma_f$$

Si se multiplica m. a m. La (4.102) por el paso circunferencial  $p_c$  y se despeja  $F_t$  se obtiene:

$$(4.103) \quad F_t = \frac{1}{6} \frac{e'^2}{p_c h} b \sigma_f p_c$$

El factor de forma  $y$  de Lewis es:

$$(4.104) \quad y = \frac{e'^2}{6 h p_c}$$

Por lo tanto la (4.103) quedará:

$$(4.105) \quad F_t = y b \sigma_f p_c$$

Para obtener en función del módulo  $M$  se dividen ambos miembros de la (4.105) por  $\pi$  y se obtiene el factor de forma  $Y$ :

$$(4.106) \quad \frac{F_t}{\pi} = \frac{y b \sigma_f p_c}{\pi}$$

Recordando que es, según la (4.4)

$$(4.4) \quad M = \frac{P_c}{\pi}$$

Y haciendo:

$$(4.107) \quad Y = y \pi$$

Reemplazando en la (4.106) estos valores, según la (4.4) y la (4.107) se obtiene:

$$(4.108) \quad F_t = Y b \sigma_f M$$

Existen tablas, como la que se muestra a continuación, que dan el valor del factor de forma  $o$  de Lewis “ $y$ ” para distintos valores del ángulo de presión y del tipo de diente.

Nº de dientes	14,5° Altura normal	20° Altura normal	20° Diente corto	Nº de dientes	14,5° Altura normal	20° Altura normal	20° Diente corto	Nº de dientes	14,5° Altura normal	20° Altura normal	20° Diente corto
10	0,056	0,064	0,083	19	0,088	0,100	0,123	43	0,108	0,126	0,147
11	0,061	0,072	0,092	20	0,090	0,102	0,125	50	0,110	0,130	0,151
12	0,067	0,078	0,099	21	0,092	0,104	0,127	60	0,113	0,134	0,154
13	0,071	0,083	0,103	23	0,094	0,106	0,130	75	0,115	0,138	0,158
14	0,075	0,088	0,108	25	0,097	0,108	0,133	100	0,117	0,142	0,161
Nº de dientes	14,5° Altura normal	20° Altura normal	20° Diente corto	Nº de dientes	14,5° Altura normal	20° Altura normal	20° Diente corto	Nº de dientes	14,5° Altura normal	20° Altura normal	20° Diente corto
15	0,078	0,092	0,111	27	0,099	0,111	0,136	150	0,119	0,146	0,165
16	0,081	0,094	0,115	30	0,101	0,114	0,139	300	0,122	0,150	0,170
17	0,084	0,096	0,117	34	0,104	0,118	0,142				
18	0,086	0,098	0,120	38	0,106	0,122	0,145	Crem.	0,124	0,154	0,175

### **Fórmula de Lewis-Barth**

Por las imperfecciones constructivas y de montajes de los engranajes, y debido a las fuerzas inerciales de las masas que se encuentran en movimiento, existen fuerzas dinámicas que actúan sobre los dientes, y si bien las mismas, a medida que aumenta la calidad constructiva y de montaje de los engranajes van perdiendo importancia, siempre tienen influencia.

Barth considera estos esfuerzos dinámicos debido los impactos por aceleraciones bruscas, deformaciones y separaciones de los engranajes y afecta la fórmula de Lewis por un factor que varía en función de la velocidad, resultando  $F_d = F_t \cdot f(V)$ , por lo que la fuerza actuante estará dada, según la velocidad de trabajo y la calidad de ejecución, por las siguientes expresiones:

- Para tallado comercial y  $V \leq 610$  m/min:

$$F_d = \frac{183 + V}{183} F_t$$

(4.109)

- Para tallado cuidadoso y  $305 \text{ m/min} < V < 1220$  m/min:

$$F_d = \frac{366 + V}{366} F_t$$

(4.110)

- Para tallado de precisión y  $V < 1220$  m/min:

$$F_d = \frac{43 + \sqrt{V}}{43} F_t$$

(4.111)

### **Fórmula de Buckingham**

Buckingham también consideró las cargas dinámicas a las que estaban expuestos los engranajes, realizando estudios sobre la influencia de los distintos factores a los que estaban expuestos, según el tipo de servicio, error de tallado, deformación de los dientes bajo carga, las que originan fuerzas inerciales y de impacto sobre los dientes con efectos similares a los de una

carga variable superpuesta a una carga constante. Para tener en cuenta estos factores, adiciona a la fuerza constante  $F_t$  resultante de la potencia transmitida por el engranaje, un término adicional  $F_i$ , por lo que se obtiene la expresión de la fuerza máxima total instantánea  $F_d$  que se ejerce sobre el diente:

$$F_d = F_t + F_i = F_t + \frac{0,113V(Cb + F_t)}{0,113V + \sqrt{Cb + F_t}}$$

(4.112)

En la (4.112),  $F_d$  es la fuerza total aplicada sobre el diente,  $F_t$  es la fuerza tangencial necesaria para transmitir la potencia,  $F_i$  es la fuerza adicional variable que tiene en cuenta las fuerzas dinámicas y  $C$  es un coeficiente dinámico que se obtiene en función del módulo, del error permisible de tallado y de la forma del diente y su material de construcción, el cual se encuentra tabulado.

Existen tablas que dan los máximos errores permitidos en el tallado de engranajes en función de sus pasos diametrales o módulo y según la clase de tallado del mismo de acuerdo a la velocidad de trabajo, las que se clasifican como:

- Clase 1, engranajes industriales tallados con fresas de formas.

- Clase 2, engranajes tallados con gran cuidado.  
- Clase 3, engranajes tallados y rectificadas muy exactamente.

Para conocer el error permitido en función de la velocidad tangencial de la circunferencia primitiva se han construido gráficos, uno de los cuales puede observarse en la figura (Fig.4.35). Conociendo el error de tallado del diente, el cual se obtiene de tablas, se obtiene el valor de  $C$ , también de tablas, como las que se transcriben a continuación:

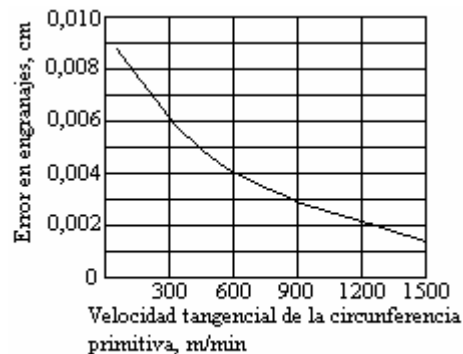


Fig.4.35

#### Máximo error permitido, en cm, en engranajes

Paso diametral	Módulo Mm	Clase 1 industrial	Clase 2 exacto	Clase 3 preciso
1	25,2	0,012192	0,006096	0,003048
2	12,7	0,010160	0,005080	0,002540
3	8,5	0,008128	0,004064	0,002032
4	6,35	0,006604	0,003302	0,001778
5	5,08	0,005588	0,002794	0,001524
6 y más finos	4,25	0,005080	0,002540	0,001270

#### Valores del factor dinámico $C$ ( $\text{kg}/\text{cm}^2$ )

Materiales de los engranajes	Forma del diente	Errores en los engranajes (cm)					
		0,00127	0,00254	0,00508	0,00762	0,01016	0,01270
Fundición de hierro y fundición de hierro.....	$14\frac{1}{2}^\circ$	71,4	142,9	285,8	428,6	571,5	714,4
Fundición de hierro y acero.....	$14\frac{1}{2}^\circ$	98,2	196,5	392,9	589,4	785,8	982,0
Acero y acero.....	$14\frac{1}{2}^\circ$	142,9	285,8	571,5	857,3	1143,0	1428,8
Fundición de hierro y							

fundición de hierro.....	20°, altura total	74,1	148,2	296,5	444,7	592,9	741,2
--------------------------	-------------------	------	-------	-------	-------	-------	-------

### Valores del factor dinámico $C$ ( $\text{kg/cm}^2$ ) (Continuación)

Materiales de los engranjes	Forma del diente	Errores en los engranjes (cm)					
		0,00127	0,00254	0,00508	0,00762	0,01016	0,0127
Acero y acero.....	20°, altura total	148,2	296,5	592,9	889,4	1185,9	1482,4
Fundición de hierro y fundición de hierro.....	20° corto	76,8	153,6	307,2	460,8	614,4	768,0
Fundición de hierro y acero.....	20° corto	105,4	210,7	421,5	632,2	843,0	1053,7
Acero y acero.....	20° corto	153,6	307,2	614,4	921,6	1228,8	1536,0

En función del tiempo de trabajo, la fuerza tangencial  $F_t$  será afectada de un factor de servicio, el cual, de acuerdo a la experiencia se encuentra en tablas como la siguiente:

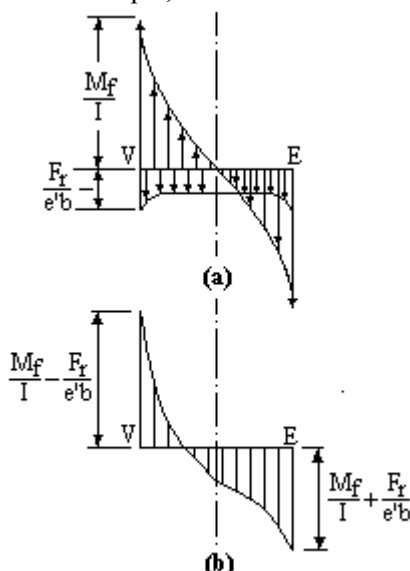
### Factores de servicio

Tipo de carga	Tipo de servicio		
	8 a 10 horas por día	24 horas por día	Intermitente 3 hs por día
Estable.....	1,00	0,80	1,25
Choque pequeño...	0,80	0,65	1,00
Choque mediano...	0,65	0,55	0,80
Choque severo.....	0,55	0,50	0,65

### Concentración de tensiones

Debido a que, en el entalle de la unión de la raíz del diente con la llanta, existe concentración de tensiones, que dependen del material del engranaje, del espesor del diente en la raíz, de la posición de la fuerza sobre el diente, del radio de entalle o acordamiento y del ángulo de presión, hace que la tensión real a la cual está sometido el material sea mayor que la que resulta de considerar las fuerzas estáticas y dinámicas.

Si se considera que la fuerza  $F_n$  que soporta el diente se descompone, según se indica en la figura (Fig.4.36), en las fuerzas  $F_t$  y  $F_r$  tangencial y radial respectivamente, aparecerán en los puntos  $V$  y  $E$  tensiones debido tanto al momento flector que produce la fuerza  $F_t$  como a la compresión que produce la fuerza  $F_r$ , dependiendo el valor de estas tensiones del momento de inercia  $I$  de la sección  $e'b$  en la raíz del diente, de la compresión  $F_r/e'b$  y del



momento flector  $M_f$ , las cuales tendrán una forma similar a las que se muestran en la figura (Fig.4.37), correspondiendo

$$\sigma_f = \frac{M_f}{I}$$

(4.113)

para la tensión unitaria a la flexión debida al momento flector  $F_r h$ , y

$$\sigma_c = \frac{F_r}{e'b}$$

(4.114)

la tensión unitaria a la compresión debida a la fuerza  $F_r$ .

Para contrarrestar los efectos de éstas tensiones, se incrementa la fuerza  $F_d$  dada por la (4.112), con un coeficiente  $\theta$ , de tal forma que el esfuerzo unitario de trabajo a la flexión  $\sigma_d$  resulte menor que el esfuerzo unitario a la fatiga alternativa  $\sigma_a$ :

$$\sigma_d = \frac{\theta F_d}{b y p_c} \leq \sigma_a$$

(4.115)

El coeficiente  $\theta$  de concentración de tensiones está dado por las siguientes expresiones:

$$\theta = 0,22 + \left(\frac{e'}{r}\right)^{0,2} \cdot \left(\frac{e'}{h}\right)^{0,4} \quad \text{para} \quad \alpha = 14^\circ 30'$$

(4.116)

$$\theta = 0,18 + \left(\frac{e'}{r}\right)^{0,15} \cdot \left(\frac{e'}{h}\right)^{0,45} \quad \text{para} \quad \alpha = 20^\circ$$

(4.117)

### **Cálculo por desgaste de un engranaje**

El desgaste en un engranaje depende del material del mismo, de la forma del perfil del diente, del acabado superficial, de la lubricación y de la mayor o menor fuerza de roce entre las superficies de los dientes. Se producen cavidades por el escoriado del material por falla por fatiga y la acumulación de material debido al material blando arrastrado. Por lo tanto el esfuerzo límite por desgaste está determinado por el límite de fatiga del material, por la forma del perfil del diente y por la dureza relativa de las superficies en contacto. Cuando dos ruedas que engranan son de materiales diferentes, el más duro de ellos producirá un endurecimiento mecánico en el más blando, incrementando su límite de fatiga, que para los aceros parece aumentar en proporción directa con la dureza Brinell. El piñón debe ser siempre más duro, para permitir el endurecimiento mecánico de la rueda, para preservar el perfil de evolvente, para permitir el mayor desgaste abrasivo en el piñón, y para disminuir la posibilidad de engranamiento.

Buckingham expresa el esfuerzo límite al desgaste por la ecuación:

$$F_w = \frac{d_p b \sigma_{fs} \operatorname{sen} \varphi}{1,4} \left( \frac{2z_r}{z_p + z_r} \right) \left( \frac{1}{E_p} + \frac{1}{E_r} \right)$$

(4.118)

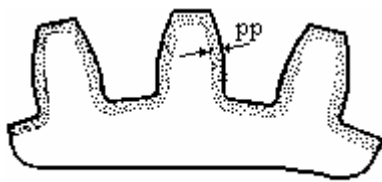
superficial,  $z_p$  número de dientes del piñón,  $z_r$  número de dientes de la rueda,  $E_p$  módulo de elasticidad del material del piñón y  $E_r$  módulo de elasticidad del material de la rueda.



En la tabla siguiente se dan valores de fatiga para algunos materiales de engranajes.

**Límites de fatiga para materiales de engranajes**

Materiales	Número de dureza Brinell	Límite de fatiga alternativa $\sigma_{fa}$ (kg/cm <sup>2</sup> )	Límite de fatiga superficial $\sigma_{fs}$ (kg/cm <sup>2</sup> )
Fundición gris de hierro.....	160	840	6300
Semiacero.....	200	1260	6300
Bronce fosforoso.....	100	1680	6300
Acero.....	150	2520	3500
	200	3500	4900
	240	4200	6020
Para acero: .....	250	4340	6300
$\sigma_{fa} = 17,5 \times$ Número Brinell .....	280	4900	7140
Para número Brinell 400 .....	300	5250	7700
Y para mayores usar:.....	320	5600	8260
$\sigma_{fa} = 7000$ .....	350	5950	9100
	360	6300	9380
$\sigma_{fs} = 28 \times$ Número Brinell.....	400	7000	10500
— 700 .....	450		11900
	500		13300
	550		14700
	600		16100

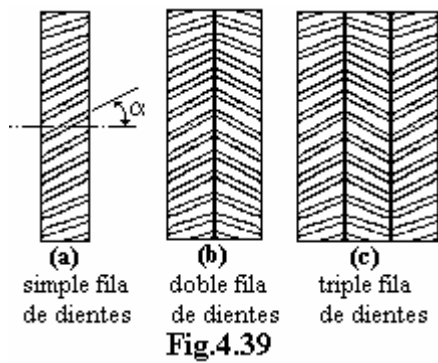


**Fig.4.38**

Para evitar el pronto desgaste del material del engranaje, sin disminuir su elasticidad y tenacidad, a los efectos de que no presenten fragilidad cuando trabajan y no sufran desgastes prematuros, se realiza un tratamiento de endurecimiento superficial de los mismos, ya sea mediante el cementado u otro método, logrando una profundidad de penetración adecuado con lo que se obtiene una superficie de elevada resistencia al desgaste sin variar las otras propiedades del material. En la figura (Fig.4.38) se observa la profundidad *pp* de penetración del cementado.

#### **Engranajes helicoidales. Características generales**

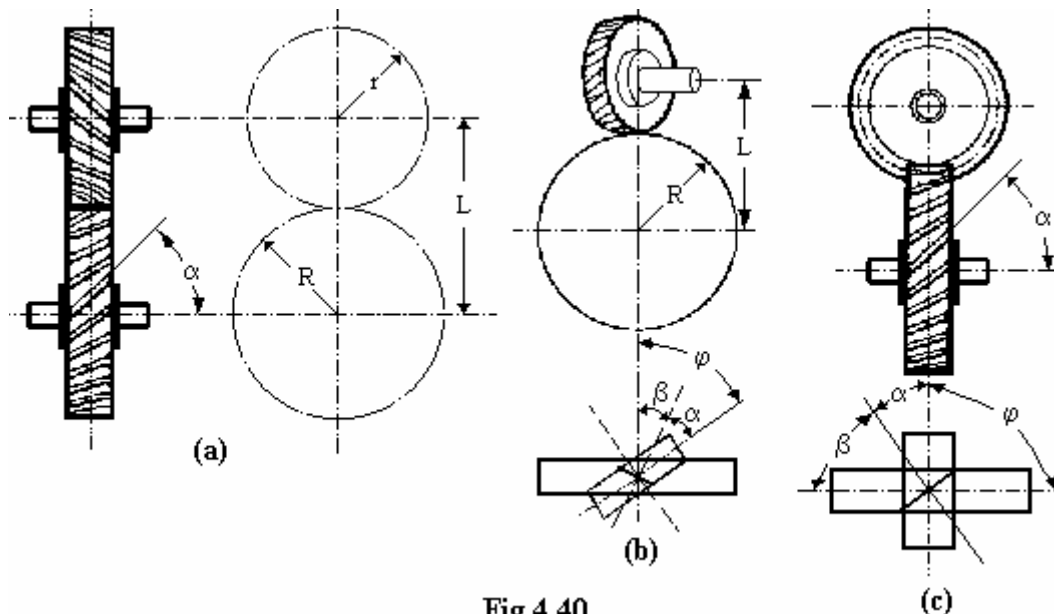
Las ruedas cilíndricas con dientes helicoidales, las que se muestran en la figura (Fig.4.39a), tienen los dientes formando una hélice inclinada un ángulo  $\alpha$  más o menos pronunciado, alrededor del eje de giro, siendo el perfil de los mismos originados por una curva evolvente helicoidal. En el engrane helicoidal, el contacto de los dientes es gradual, efectuándose en primer lugar en un punto, haciéndolo con los otros a medida que gira, hasta cubrir una diagonal sobre todo el ancho del diente. Este hecho reduce el ruido y las cargas dinámicas, lo que representa una mejora en el trabajo de engrane, ya que de este modo la presión transmitida resulta aplicada de manera continua y progresiva, permitiendo la transmisión de mayores potencias puesto que aumentan la fuerza y la velocidad transmitidas. Además es posible obtener piñones de menor número de dientes que en las ruedas de dientes rectos, lográndose una relación de transmisión más elevada.



Tienen el inconveniente de que la fuerza tangencial que transmiten se descompone en dos direcciones, una normal y otra axial, por lo tanto se produce mayores pérdidas por rozamiento en los cojinetes, sufriendo un desgaste más rápido en el flanco de los dientes, pues el contacto y resbalamiento es más prolongado. Este inconveniente se subsana adoptando doble fila de dientes y aún tres filas con hélices inclinadas el mismo ángulo, pero dispuestas en sentido contrario, constituyendo los engranajes doble helicoidal o *chevron*, según se mostrara en la figura (Fig.4.8) y se muestran

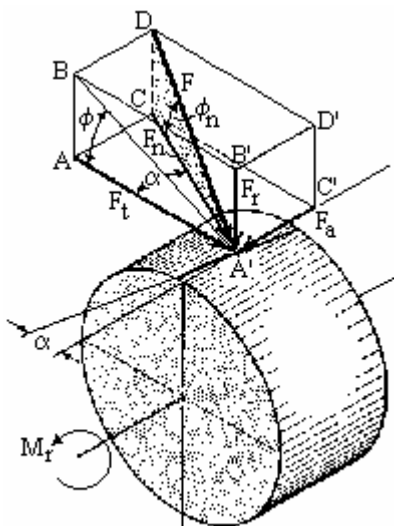
nuevamente en las figuras (Fig.4.39b) y (Fig.4.39c) respectivamente. De esta manera los empujes axiales se anulan entre sí. El valor del ángulo  $\alpha$  de inclinación de los dientes respecto del plano frontal de las ruedas toma valores desde  $10^\circ$  variando el mismo según el uso del engranaje. Para ruedas que trabajan a gran velocidad es  $\alpha = 45^\circ$ .

Los engranajes helicoidales se utilizan para altas velocidades, considerándose como tales cuando la velocidad tangencial supera los 25 m/s o el piñón gira a más de 3600 rpm, para la transmisión de grandes potencias. Además se utilizan estos tipos de engranajes cuando se necesita un funcionamiento silencioso.



### Clasificación

Como ya se indicara en las figuras (Fig.4.7), (Fig.4.8), (Fig.4.12) y (Fig.4.13), existen tres clases de engranajes cilíndricos helicoidales, los cuales se detallan nuevamente en la figura (Fig.4.40), engranajes a ejes paralelos (Fig.4.40a), a ejes oblicuos (Fig.4.40b) y a ejes perpendiculares (Fig.4.40c). Los dos últimos se denominan a ejes cruzados, y solo se utilizan para la transmisión de pequeños esfuerzos.



### Engranajes cilíndricos helicoidales a ejes paralelos. Empuje axial

Estos son los engranajes helicoidales más comunes. En la figura (Fig.4.41) se observa la fuerza  $F$  que actúa sobre el plano de la circunferencia primitiva en el centro de la cara

del diente, siendo su línea de acción la línea de presión normal al diente inclinada el ángulo normal  $\phi_n$ . La proyección de  $F$  sobre el plano de rotación  $ABB'A'$  da el ángulo de presión  $\phi$  transversal. La proyección de  $F$  sobre el plano  $ACC'A'$  tangente al cilindro primitivo está inclinada el ángulo  $\alpha$  y es la componente  $F_n$  de dicha fuerza sobre el mismo.

La relación que existe entre  $\phi_n$  y  $\phi$  se la puede obtener del análisis de la figura de la siguiente forma:

$$\operatorname{tg} \phi_n = \frac{CD}{CA'} = \frac{AB}{CA'} \quad (4.119)$$

Pero es:

$$AB = \operatorname{tg} \phi \cdot AA' \quad (4.120)$$

Y

$$CA' = \frac{AA'}{\cos \alpha} \quad (4.121)$$

Reemplazando en la (4.119) los valores de  $AB$  y  $CA'$  dadas por las (4.120) y (4.121) respectivamente se obtiene:

$$\operatorname{tg} \phi_n = \operatorname{tg} \phi \cos \alpha \quad (4.122)$$

La fuerza  $F$ , en el funcionamiento produce una fuerza de rozamiento sobre el diente, cuyo valor está dado por la expresión:

$$F_{Roz} = F \mu_1 \quad (4.123)$$

Las componentes de la fuerza  $F$  son las fuerzas  $F_t$  tangencial,  $F_r$  radial y  $F_a$  axial. Del análisis de la figura (Fig.4.41), los valores de estas tres últimas fuerzas en función de la fuerza  $F$  resultan:

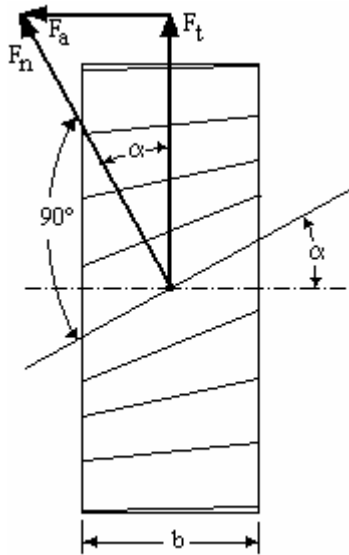


Fig.4.42

$$F_t = F \cos \phi_n \cos \alpha \quad (4.124)$$

$$F_r = F \sin \phi_n \quad (4.125)$$

$$F_a = F \cos \phi_n \sin \alpha \quad (4.126)$$

En los engranajes helicoidales es importante conocer el valor del empuje axial para calcular o seleccionar el cojinete axial. Como lo que generalmente se conoce es el valor de la fuerza tangencial  $F_t$  a transmitir deducida de la potencia necesaria demandada, el empuje axial se obtiene a partir del valor de la fuerza periférica tangencial  $F_t$ , de las dimensiones del engranaje y de la velocidad angular. En la figura (Fig.4.42) se observan las fuerzas que actúan sobre el diente, en el plano tangencial  $ACC'A'$  tangente al cilindro primitivo y sobre el plano de rotación de la circunferencia primitiva siendo  $F_n$  la fuerza normal,  $F_a$  la fuerza axial que es resistida por los órganos de sujeción del engranaje, y  $F_t$  la fuerza tangencial que es la que le imprime el movimiento de rotación, siendo sus expresiones en Newton (N) en función de la potencia, según lo visto, para  $N$  en vatios,  $R$  en m y  $n$  en rpm:

$$N = F_t \cdot v = \frac{F_t 2\pi R n}{60} \quad (4.127)$$

De la (4.127) se obtiene:

$$F_t = \frac{N}{v} = \frac{60N}{2\pi Rn} = 9,55 \frac{N}{Rn}$$

(4.128)

Resultando, de la figura (Fig.4.42):

$$F_n = \frac{F_t}{\cos \alpha} = 9,55 \frac{N}{Rn} \frac{1}{\cos \alpha}$$

(4.129) Y además:

$$F_a = F_n \operatorname{sen} \alpha = \frac{F_t}{\cos \alpha} \operatorname{sen} \alpha = F_t \operatorname{tg} \alpha = 9,55 \frac{N}{Rn} \operatorname{tg} \alpha$$

(4.130)

O también, en kg, para  $N$  en CV,  $R$  en cm y  $n$  en rpm:

$$N = \frac{F_t \cdot v}{75}$$

(4.131)

Por ser:

$$v = \frac{2\pi Rn}{60}$$

(4.132)

La (4.131) resulta:

$$N = \frac{F_t \cdot R \cdot n}{71620}$$

(4.133)

Resultando la fuerza tangencial  $F_t$ :

$$F_t = \frac{71620N}{Rn}$$

(4.134)

Y las fuerzas normal  $F_n$  y axial  $F_a$ :

$$F_n = \frac{71620N}{Rn} \frac{1}{\cos \alpha}$$

(4.135)

$$F_a = \frac{71620N}{Rn} \operatorname{tg} \alpha$$

(4.136)

### **Pasos de la hélice y del diente**

Si se desarrolla la superficie cilíndrica primitiva de una rueda dentada helicoidal se tiene, según se indica en la figura (Fig.4.43):

a) **Paso circular de la hélice**: es el desarrollo normal de la circunferencia primitiva, por lo tanto si el diámetro primitivo es  $D$  el paso circunferencial es.

$$p'_c = \pi D$$

(4.137)

b) **Paso axial de la hélice**: es la altura que alcanza la hélice paralelamente al eje de la rueda:

$$p'_a = p'_c \operatorname{tg} \beta = p'_c \operatorname{ctg} \alpha = \frac{p'_c}{\operatorname{tg} \alpha}$$

(4.138)

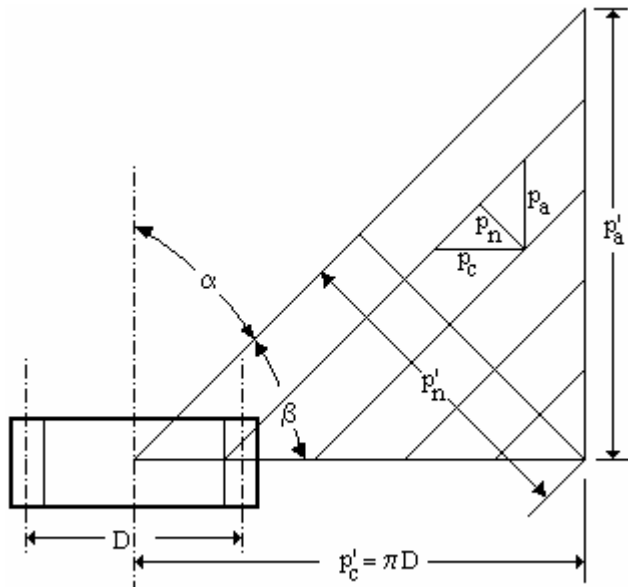


Fig.4.43

c) **Paso normal de la hélice:** es la altura del triángulo formado por el desarrollo de la hélice y de la circunferencia primitiva, normal a la hélice:

$$p'_n = p'_c \cos \alpha$$

(4.139)

d) **Paso circunferencial del diente:** si se considera una rueda formada por  $z$  dientes y diámetro primitivo  $D$ , el paso circunferencial  $p_c$  del diente estará medido, según se indica en la figura (Fig.4.44), sobre el diámetro primitivo y valdrá:

$$p_c = \frac{\pi D}{z}$$

(4.140)

e) **Paso normal del diente:** si se desarrolla la superficie cilíndrica primitiva y sobre ella se trazan tantas divisiones como número de dientes tiene la rueda, cada generatriz helicoidal correspondiente al eje de un diente, estará separada de la anterior una distancia  $p_n$  denominada paso normal del diente, estando dado en función del paso circunferencial  $p_c$ , según se puede observar en la figura (Fig.4.44), por la expresión:

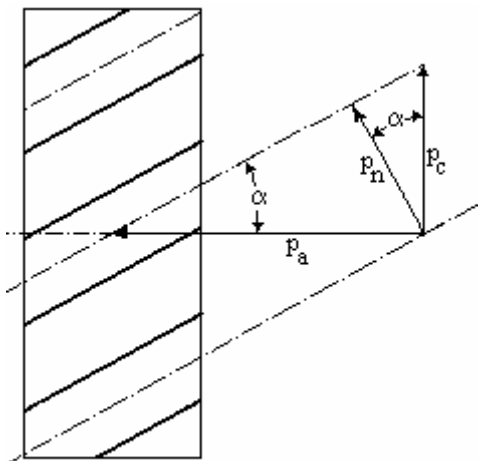


Fig.4.44

$$p_n = p_c \cos \alpha = \frac{\pi D}{z} \cos \alpha$$

(4.141)

f) **Paso axial del diente:** la distancia entre dos dientes consecutivos, tomada sobre el eje de la rueda constituye el paso axial  $p_a$  del diente, el cual en función del paso circunferencial  $p_c$ , es igual, de acuerdo a la figura (Fig.4.44) a:

$$p_a = p_c \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\pi D \cos \alpha}{z \operatorname{sen} \alpha}$$

(4.142)

### Módulos

En las ruedas helicoidales, al igual que en las de dientes rectos, es conveniente operar con el módulo. Para este tipo de engranajes existen dos módulos, el correspondiente al paso circunferencial  $p_c$  y al paso normal  $p_n$ , designados de igual forma que éstos:

a) **Módulo circunferencial**

$$M_c = \frac{p_c}{\pi} = \frac{\pi D}{\pi z} = \frac{D}{z}$$

(4.143)

b) **Módulo normal**

$$M_n = \frac{p_n}{\pi} = \frac{p_c}{\pi} \cos \alpha = M_c \cos \alpha = \frac{D}{z} \cos \alpha$$

(4.144)

**Dimensiones del diente y de la rueda**

Para dimensionar los dientes de un engranaje helicoidal se debe conocer la resistencia que el mismo debe tener para soportar las solicitaciones a las cuales estará expuesto. El cálculo de esta resistencia se hace empleando las fórmulas para engranajes cilíndricos de dientes rectos ya vistas, pero teniendo en cuenta que el número de dientes que se debe tomar no es el del número real que tendrá el engranaje helicoidal, si no el número virtual o formativo  $z_v$ , el cual se define como el número de dientes que tendría un cilindro que tuviera un radio primitivo igual al radio de curvatura en un punto localizado en el extremo del eje menor de la elipse que se obtiene al tomar una sección del engranaje en el plano normal, que del análisis de la figura (Fig.4.45) resulta:

El diámetro primitivo del engranaje helicoidal es  $D$ . Si se considera un plano A-A normal al eje del diente que corta a la rueda, la sección que se obtiene es una elipse, cuyo diámetro menor es  $D$  según muestra la figura (Fig.4.45) en el corte A-A. De la geometría analítica se conoce que el radio de curvatura  $r$  en el extremo del semieje menor de la elipse, indicado por el punto B, vale:

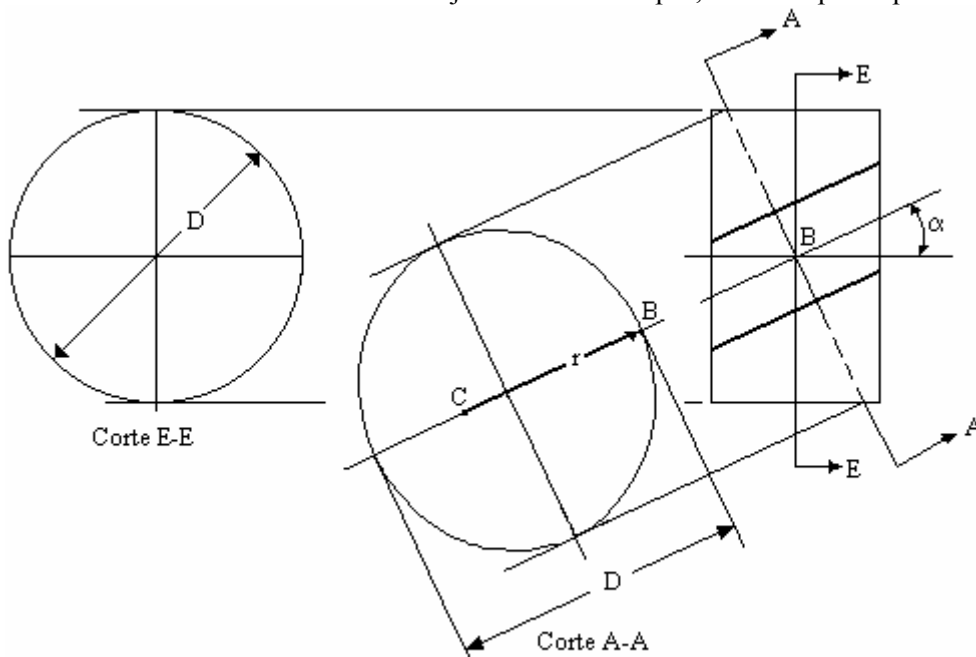


Fig.4.45

$$r = \frac{D}{2 \cos^2 \alpha}$$

(4.145)

La forma del diente situado en B será la de un diente engendrado por una superficie de un cilindro primitivo de radio  $r$  y el número de dientes de esta superficie se define como el número virtual o formativo de dientes  $z_v$ , resultando:

$$z_v = \frac{2\pi r}{p_n} = \frac{\pi D}{p_n \cos^2 \alpha}$$

(4.146)

De la (4.133) se tiene que es:

$$\frac{\pi D}{p_n} = \frac{z}{\cos \alpha}$$

(4.147)

Reemplazando este valor dado por la (4.147) en la (4.146) se tiene finalmente:

$$z_v = \frac{z}{\cos^3 \alpha}$$

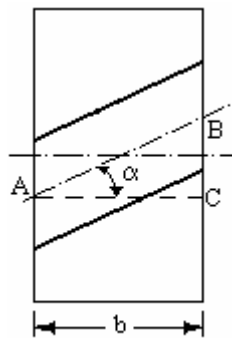


Fig.4.46

(4.148)

Para el cálculo la resistencia mecánica de los dientes de un engranaje helicoidal, se utiliza el factor  $y$  para el número virtual  $z_v$  de dientes.La altura de los dientes es igual a la de los engranajes cilíndricos de dientes rectos. Las dimensiones del diente, como se acaba de ver, se realizan de acuerdo con el módulo normal  $M_n$ , es decir perpendicular a su dirección.

**Ancho del diente:** es igual a la diagonal  $A'B'$  que cruza el ancho  $b$  del engranaje según muestra la figura (Fig.4.46), formando el ángulo  $\alpha$  con el eje de giro de la rueda, estando ambos relacionados por la expresión:

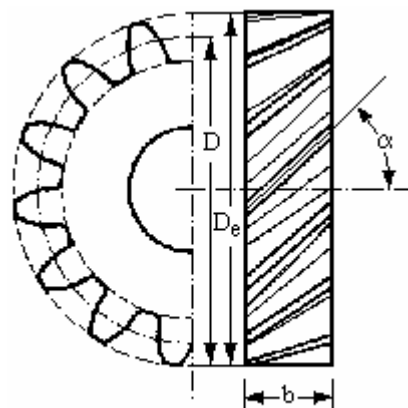


Fig.4.47

$$A'B' = \frac{\text{lado } A'C'}{\cos \alpha} = \frac{b}{\cos \alpha}$$

(4.149)

**Diámetro primitivo  $D$ :** en la figura (Fig.4.47) se indica el diámetro primitivo  $D$ , que de acuerdo a la (4.143) estará dado por la expresión:

$$D = \frac{p_c z}{\pi} = zM_c = z \frac{M_n}{\cos \alpha}$$

(150)

**Diámetro exterior  $D_e$ :** es igual al diámetro primitivo más dos veces la altura de la cabeza del diente. Si la altura de la cabeza del diente se toma igual a  $M_n$ , será:

$$D_e = D + 2M_n = zM_c + 2M_n = z \frac{M_n}{\cos \alpha} + 2M_n = \left( \frac{z}{\cos \alpha} + 2 \right) M_n$$

(4.151)

De la (4.151) se puede deducir que el módulo normal  $M_n$  vale:

$$M_n = \frac{D_e}{\frac{z}{\cos \alpha} + 2}$$

(4.152)

**Ángulo  $\alpha$  de la hélice sobre el cilindro primitivo que da la inclinación del diente:** el valor de este ángulo se puede obtener a partir de las expresiones ya vistas, como por ejemplo la (4.141) y la (4.144), de donde resulta:

$$\cos\alpha = \frac{p_n}{p_c} = \frac{M_n}{M_c}$$

(4.153)

De la (4.153) se obtiene:

$$\alpha = \arccos \frac{p_n}{p_c} = \arccos \frac{M_n}{M_c}$$

(4.154)

Para el ángulo  $\alpha$  se toman por lo general los valores  $10^\circ$ ,  $15^\circ$ ,  $20^\circ$ ,  $25^\circ$ ,  $26^\circ34'$ ,  $30^\circ$ ,  $40^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $50^\circ$  y  $63^\circ26'$ .

#### Par de ruedas cilíndricas helicoidales de ejes paralelos

La figura (Fig.4.48) muestra dos ruedas cilíndricas helicoidales de ejes paralelos, siendo sus diámetros primitivos  $d$  y  $D$  para el engranaje menor y mayor respectivamente, engranando entre sí ambos engranajes, presentando sus dientes igual ángulo  $\alpha$  de inclinación pero en sentido inverso.

El paso circunferencial del diente de la rueda menor es:

$$p_{cd} = \frac{\pi d}{z_d}$$

(4.155)

y por lo tanto su módulo:

$$M_{cd} = \frac{d}{z_d}$$

(4.156)

Para la rueda mayor el paso circunferencial del diente es:

$$p_{cD} = \frac{\pi D}{z_D}$$

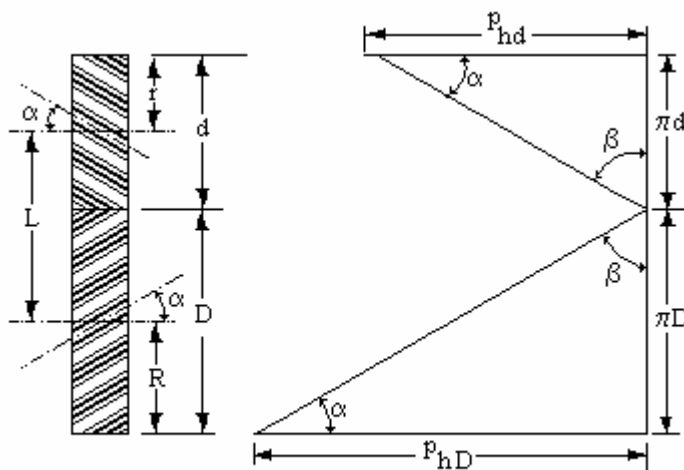


Fig.4.48

(4.157)

y su módulo:

$$M_{cD} = \frac{D}{z_D}$$

(4.158)

Ambos pasos circunferenciales, y por lo tanto los módulos, son iguales, es decir:

$$\text{a) } p_{cd} = p_{cD} = p_c \qquad \text{b) } M_{cd} = M_{cD} = M_c$$

(4.159)

Para ruedas con igual número de dientes ( $z_d = z_D$ ), el paso de la hélice en el cilindro primitivo es igual para ambos engranajes, en tanto que para ruedas con distintos números de dientes ( $z_d \neq z_D$ ) los pasos de las hélices son distintos.



**Distancia entre centros de ejes:** la distancia  $L$  entre los centros de los ejes paralelos de dos ruedas helicoidales engranadas entre sí, según muestra la figura (Fig.4.48) está dado por la siguiente expresión:

$$L = \frac{d + D}{2} = r + R \tag{4.160}$$

De las expresiones (4.140), (4.143) y (4.159) se obtiene, tanto para la rueda menor como la mayor:

$$a) \quad d = z_d \frac{p_c}{\pi} = z_d M_c \quad \text{y} \quad b) \quad D = z_D \frac{p_c}{\pi} = z_D M_c \tag{4.161}$$

Y de las expresiones (4.141) y (4.144) se obtiene:

$$a) \quad p_c = \frac{p_n}{\cos \alpha} \quad \text{y} \quad b) \quad M_c = \frac{M_n}{\cos \alpha} \tag{4.162}$$

Por lo tanto la (4.160) puede escribirse, reemplazando en ella los valores de  $d$  y  $D$  dados por la (4.161) y teniendo en cuenta además las (4.162):

$$L = \frac{p_c}{2\pi} (z_d + z_D) = \frac{p_n}{2\pi \cos \alpha} (z_d + z_D) = \frac{M_c}{2} (z_d + z_D) = \frac{M_n}{2 \cos \alpha} (z_d + z_D) \tag{4.163}$$

La relación de transmisión se obtiene de igual forma que para los engranajes rectos.

**Engranajes cónicos con dientes rectos y ejes a 90°**

Los engranajes cónicos, los cuales se han mostrado en las figuras (4.9) y (4.10), presentan la particularidad de que la prolongación de sus ejes se cortan entre sí, pudiendo hacerlo, según ya se mostrara en la figura (Fig.4.11), con un ángulo  $\alpha$  mayor, menor o igual a 90°. Estos engranajes reemplazan a los conos de fricción que transmiten el movimiento de rotación alrededor de sus ejes a otros conos por fricción, los cuales se muestran en la figura (Fig.4.49), constituyendo estos últimos los conos primitivos de los engranajes cónicos, sobre los cuales se realiza el contacto entre dos engranajes cónicos que engranan entre sí. Los dientes de estos engranajes pueden ser rectos o helicoidales, en este último caso en arco o en espiral. Se analizarán únicamente los engranajes cónicos de dientes rectos, debiendo el estudiante recurrir a bibliografía específica en caso de que sea de interés su conocimiento.

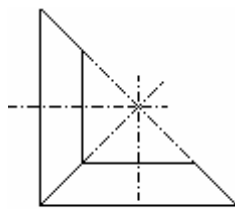


Fig.4.49

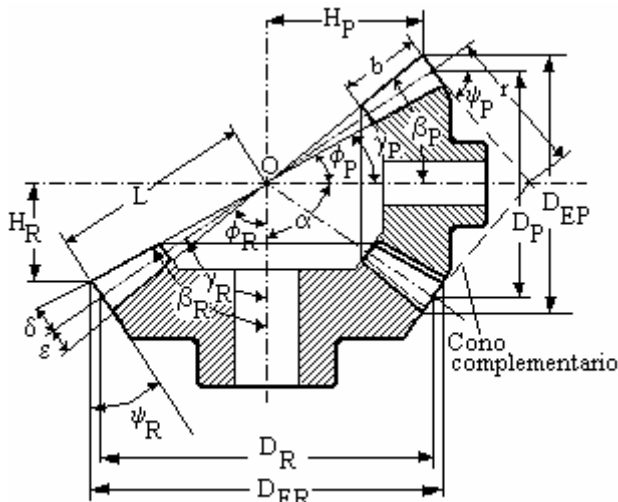


Fig.4.50

Para los engranajes cónicos de dientes rectos, sus dientes se disponen siguiendo las generatrices de los conos primitivos. La parte del diente que se halla fuera del cono primitivo se denomina cabeza y la que está en su interior raíz del mismo. Al engranaje de menor diámetro también se lo denomina piñón.

En la figura (Fig.4.50) se muestran dos engranajes cónicos que están engranando entre sí, indicándose sus distintas partes, las cuales se describen a continuación.

Las circunferencias primitivas son las circunferencias mayores de los conos

primitivos, siendo sus diámetros primitivos  $D_R$  y  $D_P$ . El módulo y el paso circunferencial se determinan por el número de dientes en relación con el diámetro primitivo. Las generatrices de los conos primitivos y las de cabezas y raíces de los dientes convergen al mismo punto  $O$ . Los dientes disminuyen progresivamente desde su parte exterior, lugar donde tienen su origen todas las medidas referidas al diente y a los diámetros principales, hacia el centro donde convergen los ejes y las líneas de los flancos del diente prolongadas.

Además de las denominaciones conocidas de los parámetros de los engranajes rectos y que también se emplean en los cónicos, éstos debido a la conicidad que tienen y a la serie de ángulos que aparecen por este motivo, presentan otros con las siguientes denominaciones: ángulo primitivo  $\gamma_R$  de la rueda mayor; ángulo primitivo  $\gamma_P$  de la rueda menor; ángulo exterior  $\beta_R$  o de torno de la rueda mayor; ángulo exterior  $\beta_P$  o de torno de la rueda menor; ángulo de fondo  $\phi_R$  de la rueda mayor; ángulo de fondo  $\phi_P$  de la rueda menor; ángulo  $\delta$  de cabeza del diente; ángulo  $\varepsilon$  de raíz del diente; longitud  $b$  del diente; longitud  $L$  de la generatriz tomada desde el cono primitivo; distancia  $H_R$  y  $H_P$  desde la circunferencia mayor de cabeza al punto de convergencia de los ejes de la rueda mayor y menor respectivamente, utilizada para comprobación; ángulo complementario  $\psi_R$  de la rueda mayor; ángulo complementario  $\psi_P$  de la rueda menor.

Para obtener los distintos parámetros de los engranajes cónicos se utilizan similares expresiones a las ya vistas para los engranajes cilíndricos, teniéndose en cuenta la influencia de los ángulos que determinan las dimensiones del diente. Así para un módulo  $M$  se tendrá:

$$\begin{aligned} \text{- Paso circunferencial} & & p &= M\pi \\ (4.164) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{- Altura del diente} & & h &= 2,16M \\ (4.165) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{- Altura de cabeza} & & a &= M \\ (4.166) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{- Altura de raíz} & & d &= 1,16M \\ (4.167) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{- Espesor del diente} & & e &= 1,57M \\ (4.168) \end{aligned}$$

La longitud  $L$  de la generatriz del cono primitivo es la misma tanto para la rueda mayor como para la menor (piñón) ya que sus diámetros primitivos, sea cualquiera la relación en que estén al engranar, se encuentran a la misma distancia del centro donde convergen las prolongaciones de los ejes y los flancos de los dientes.

Se pueden escribir las distintas expresiones, tanto para la rueda como para el piñón, que relacionan los parámetros de los engranajes unos en función de los otros, como son módulo, diámetros primitivos, números de dientes, etc.

### Engranaje mayor

$$\begin{aligned} \text{- Diámetro exterior:} & & D_{ER} &= (2 \operatorname{sen} \gamma_P + z_R)M = D_R + 2M \cos \gamma_R \\ (4.169) \end{aligned}$$

$$M = \frac{D_R}{z_R}$$

$$\begin{aligned} \text{- Módulo} & & & \\ (4.170) \end{aligned}$$

O también, teniendo en cuenta la (4.169):

$$\begin{aligned} (4.171) \quad M &= \frac{D_{ER}}{2(\operatorname{sen} \gamma_P) + z_R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{- Ángulo primitivo:} & & & \\ (4.172) \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} \gamma_R = \frac{D_R}{D_P} = \frac{z_R}{z_P}$$

También por diferencia se obtiene:  
(4.173)

$$\gamma_R = 90^\circ - \gamma_P$$

- Ángulo de cabeza del diente:  
(4.174)

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{M}{L} = \frac{2 \operatorname{sen} \gamma_R}{z_R}$$

- Ángulo exterior:  
(4.175)

$$\beta_R = \gamma_R + \delta$$

- Ángulo de fondo:  
(4.176)

$$\phi_R = \gamma_R + \varepsilon$$

- Ángulo de raíz:  
(4.177)

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{1,16M}{L} = 1,16 \operatorname{tg} \delta$$

- Ángulo complementario:  
(4.178)

$$\psi_R = 90^\circ - \gamma_R$$

- Longitud de la generatriz del cono primitivo:

$$L = \frac{D_R}{2 \operatorname{sen} \gamma_R} = \frac{z_R}{2 \operatorname{sen} \gamma_R} M$$

(4.179)

- Distancia de la circunferencia primitiva al vértice del cono primitivo:

$$H_R = \frac{D_P}{2} - M \operatorname{sen} \gamma_R$$

(4.180)

### **Engranaje menor o piñón**

- Diámetro exterior:  
(4.181)

$$D_{EP} = (2 \operatorname{sen} \gamma_R + z_P) M = D_P + 2M \cos \gamma_P$$

$$M = \frac{D_P}{z_P}$$

- Módulo  
(4.182)

O también, teniendo en cuenta la (4.181):

$$M = \frac{D_{EP}}{2(\operatorname{sen} \gamma_R) + z_P}$$

(4.182)

- Ángulo primitivo:  
(4.183)

$$\operatorname{tg} \gamma_P = \frac{D_P}{D_R} = \frac{z_P}{z_R}$$

También por diferencia se obtiene:  
(4.184)

$$\gamma_P = 90^\circ - \gamma_R$$

- Ángulo exterior:  
(4.185)

$$\beta_P = \gamma_P + \delta$$

- Ángulo de fondo:  
(4.186)

$$\phi_P = \gamma_P - \varepsilon$$

- Ángulo complementario:  
(4.187)

$$\psi_P = 90^\circ - \gamma_P$$

- Longitud de la generatriz del cono primitivo:

$$L = \frac{D_P}{2 \operatorname{sen} \gamma_P} = \frac{z_P}{2 \operatorname{sen} \gamma_P} M$$

(4.188)

- Distancia de la circunferencia primitiva al vértice del cono primitivo:

$$H_p = \frac{D_R}{2} - M \operatorname{sen} \gamma_p$$

(4.189)

La longitud  $b$  del diente debe ser igual o menor que  $1/3L$  o de  $6M$  a  $10M$ .

### Dimensiones del diente

En todos los cálculos de resistencia de los engranajes cónicos se utiliza el número virtual de dientes  $z_v$ , siendo éste el número de dientes que tendría un engranaje cilíndrico de dientes rectos cuyo radio primitivo es igual al radio  $r$  del cono complementario, el cual se indica en la figura (Fig.4.50). La relación que liga al número real de dientes  $z$  del engranaje cónico con el número virtual de dientes  $z_v$  del engranaje cilíndrico está dada por la expresión:

$$z_v = \frac{z}{\cos \gamma}$$

(4.190)

Siendo en la (4.190)  $\gamma$  el ángulo del cono primitivo.

Para dimensionar el diente se debe conocer la resistencia que debe presentar cuando es solicitado por la fuerza actuante  $F_t$  sobre él. Si bien se puede utilizar la expresión (4.105) dada por Lewis, debido a que el tamaño del diente al igual que la fuerza que actúa sobre el flanco varían a lo largo del diente, se la debe modificar para engranajes cónicos.

La figura (Fig.4.51) representa la parte superior del diente y un elemento de longitud diferencial  $dl$  del mismo a la distancia  $l$  del vértice  $O$  del cono primitivo, sobre el cual se considera que actúa la fuerza  $dF$  de intensidad constante, siendo  $p_l$  el paso circunferencial del engranaje a esta distancia.

La expresión de Lewis para este elemento del diente de longitud  $dl$  sobre el cual actúa la fuerza  $dF$  y cuyo paso circunferencial es  $p_l$ , para una tensión  $\sigma_t$  de trabajo, se puede escribir:

$$dF = \sigma_t p_l y dl$$

(4.191)

El momento torsor respecto del eje del engranaje es:

$$dF.r = \sigma_t p_l y dl r$$

(4.192)

El espesor del diente, el paso circunferencial y el radio  $r$  en cualquier punto, son proporcionales a la distancia desde el vértice del cono primitivo, es

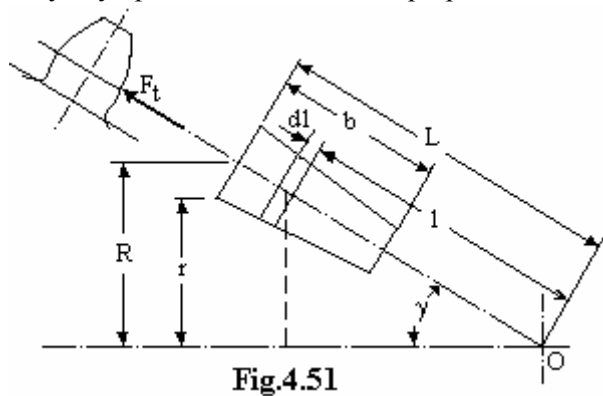


Fig.4.51

decir:

$$\frac{r}{l} = \frac{R}{L} \Rightarrow r = \frac{Rl}{L}$$

(4.193)

y

$$\frac{p_l}{l} = \frac{p_c}{L} \Rightarrow p_l = \frac{p_c l}{L}$$

(4.194)

Reemplazando en la (4.192) la expresión de  $r$  y de  $p_l$  dadas por la (4.193) y (4.194) respectivamente se obtiene:

$$dF = \frac{Rl}{L} \sigma_t \frac{p_c l}{L} y dl = R \sigma_t p_c y \left( \frac{l}{L} \right)^2 dl$$

(4.195)

La expresión (4.195) se puede integrar para  $r$  variando de 0 a  $R$  y  $l$  variando entre  $L$  y  $L - b$ , obteniéndose:

$$M_t = F_t \cdot R = \frac{R \sigma_t p_c y}{L^2} \int_{L-b}^L l^2 dl = R \sigma_t p_c b y \left( 1 - \frac{b}{L} + \frac{b^2}{3L^2} \right)$$

(4.196)

Despejando de la (4.196) la fuerza  $F_t$  se obtiene:

$$F_t = \sigma_t b p_c y \left( 1 - \frac{b}{L} + \frac{b^2}{3L^2} \right)$$

(4.197)

Como el valor de  $b$  como máximo alcanzan la longitud de  $1/3L$ , el término  $b^2/3L^2$  se hace igual a  $1/27$  que se puede despreciar sin introducir un error apreciable, por lo que la (4.197) se puede escribir:

$$F_t = \sigma_t b p_c y \left( \frac{L-b}{L} \right) = \sigma_t b Y \left( \frac{L-b}{L} \right)$$

(4.198)

Siendo  $p_c$  el paso circunferencial en la extremidad mayor,  $M$  el módulo en a extremidad mayor,  $y$  e  $Y$  factor de forma correspondiente al número virtual  $z_v$  de dientes, según se utilice para el cálculo  $p_c$  o  $M$  respectivamente y  $F_t$  la fuerza tangencial equivalente en la extremidad mayor

La generatriz  $L$  del cono primitivo, siendo  $R_R$  el radio primitivo de la rueda mayor y  $R_P$  el radio primitivo de la rueda menor (piñón), vale:

$$L = \sqrt{R_R^2 + R_P^2}$$

(4.199)

La tensión de trabajo  $\sigma_t$  se utiliza teniendo en cuenta la tensión admisible  $\sigma_{adm}$  afectada de los factores de velocidad  $\phi_v$  y de servicio  $\phi_s$ :

$$\sigma_t = \frac{\sigma_{adm}}{\phi_v \cdot \phi_s}$$

(4.200)

El factor de velocidad  $\phi_v$  es el dado por los factores que afectan las fuerzas del segundo miembro de las expresiones ya vistas (4.109), (4.110) y (4.111) y el factor de servicio  $\phi_s$  se lo obtiene de la tabla también ya vista en engranajes cilíndricos de dientes rectos.

La velocidad que se utiliza para los cálculos y dimensionamiento es la velocidad de la extremidad mayor y los factores de forma  $y$  e  $Y$  se los obtiene de tablas de bibliografía especializada. Las cargas dinámicas y de desgaste se las obtienen con las mismas expresiones usadas para los engranajes cilíndricos pero tomando el número virtual  $z_v$  de dientes y la velocidad de la circunferencia primitiva de la extremidad mayor, y la fuerza  $F_t$  como el esfuerzo tangencial equivalente a esta velocidad.

### **Tornillo sinfín y rueda helicoidal**

**Características:** Este mecanismo sirve para transmitir el movimiento entre ejes que forman en el espacio un ángulo cualquiera. El caso más común es cuando los ejes se cruzan en ángulo recto.

Es utilizado cuando se exige una gran reducción de velocidad en un espacio limitado y una marcha silenciosa. En la figura (Fig.4.14) se han mostrado los distintos casos que se pueden presentar, según sea el tipo del perfil de los dientes, tanto de la rueda como el del tornillo sinfín, los que podían ser: a) tornillo sinfín y rueda helicoidal ambos de perfil cilíndrico, b) tornillo sinfín de perfil cilíndrico y rueda helicoidal perfil globoide (axoide), siendo éste el de uso más generalizado y c) tornillo sinfín y rueda helicoidal ambos de perfil globoide.

En la figura (4.52) se pueden observar los distintos elementos que conforman el par tornillo sinfín – rueda helicoidal, siendo éstos, según se indica en la figura, los siguientes:

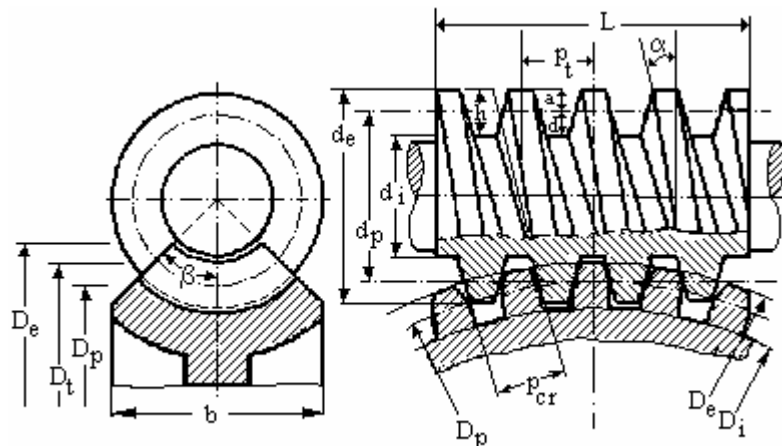


Fig.4.52

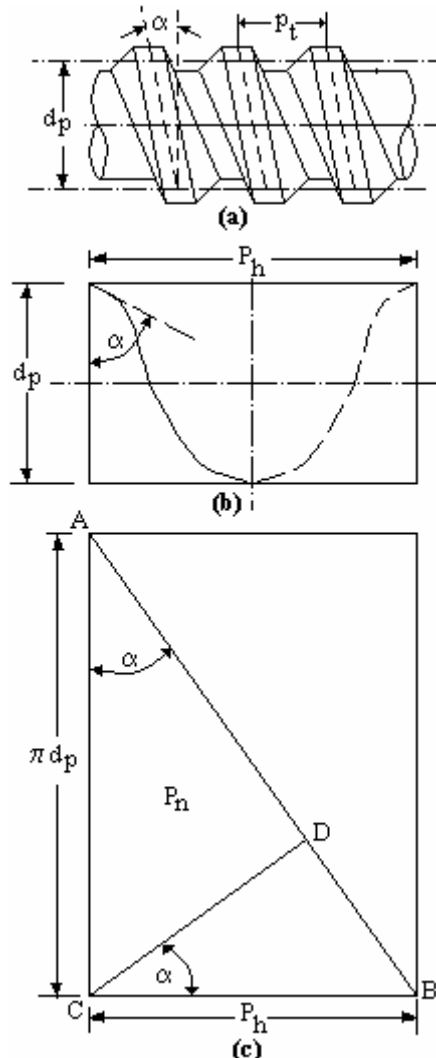
- $L$ : longitud del tornillo sinfín.
- $p_t$ : paso axial entre filetes del tornillo.
- $a$ : altura de cabeza (adendo) del filete.
- $d$ : altura de raíz (dedendo) del filete.
- $h$ : altura total del filete.
- $\alpha$ : ángulo de avance del tornillo.
- $d_i$ : diámetro interior o de raíz del tornillo.
- $d_p$ : diámetro primitivo del tornillo.

- $d_e$ : diámetro exterior del tornillo.
- $p_{cr}$ : paso circunferencial de la rueda.
- $D_p$ : diámetro primitivo de la rueda.
- $D_e$ : diámetro exterior de la rueda.
- $\beta$ : ángulo de la cara de la rueda.
- $D_i$ : diámetro interior de la rueda.
- $D_t$ : diámetro de garganta de la rueda.
- $b$ : ancho axial de la rueda.

**Relación de transmisión**

Para un tornillo de un filete, cuando éste da una vuelta completa, un punto apoyado sobre el filete habrá avanzado paralelamente al eje del tornillo una distancia igual al paso axial  $P_h$  de la hélice, la que se muestra en la figura (Fig.4.53b) y que resulta igual al paso axial  $p_t$  del filete,

que se muestra en la figura (Fig.4.53a) siendo este último la distancia que existe entre dos puntos consecutivos que ocupan igual posición en el filete, tomada en forma paralela al eje del tornillo, lo que se puede observar en la figura (Fig.4.53a). El paso axial  $p_t$  del tornillo sin fin es igual al paso circunferencial  $p_{cr}$  de la rueda que engrana con el tornillo. Para este caso, cuando el tornillo da una vuelta completa, la rueda se habrá desplazado un ángulo central correspondiente a un diente. Si el tornillo fuera de dos filetes, al dar una vuelta completa hará avanzar dos dientes a la rueda, si tuviera tres filetes, la rueda avanzará tres dientes y así sucesivamente. Es decir que para  $z_t$  filetes por paso de filete, el paso axial de la hélice, o avance del tornillo será:



$$P_h = z_t \cdot p_t = \pi \cdot d_p \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

(4.201)

Si se tiene una rueda de  $z_R$  dientes, cuyo radio primitivo es  $R$  en m, que gira a  $n_R$  vueltas por minuto, su velocidad tangencial  $v_R$  en m/s será:

$$v_R = \frac{2\pi R n_R}{60}$$

(4.202)

Fig.4.53

Esta rueda engrana con un tornillo sinfin de  $z_t$  filetes, cuyo paso axial es  $p_t$  en m, que gira a  $n_t$  vueltas por minuto con una velocidad tangencial  $v_t$  en m/s igual a:

$$v_t = \frac{z_t p_t n_t}{60} \quad (4.203)$$

Resultando:

$$v_R = v_t \quad (4.204)$$

La relación de transmisión  $i$  está dada por la expresión:

$$i = \frac{n_R}{n_t} = \frac{z_t (\text{número de filetes del sin fin})}{z_R (\text{número de dientes de la rueda})}$$

(4.205)

Si se desarrolla el cilindro primitivo del tornillo según se muestra en la figura (Fig.4.53c), se obtiene un triángulo rectángulo formado por el desarrollo del diámetro primitivo, el desarrollo de la hélice y el paso de la hélice. Además la normal  $CD$  a  $AB$  es el paso normal  $P_n$  de la hélice del tornillo que se mide perpendicular al desarrollo de la hélice. Del análisis de la figura se obtiene:

- Módulo axial:

(4.206)

- Paso normal:

(4.207)

$$M_a = \frac{P_h}{\pi}$$

$$P_n = P_h \cos \alpha = \pi d_p \operatorname{sen} \alpha$$

- Módulo normal:

(4.208)

$$M_n = \frac{P_n}{\pi} = d_p \operatorname{sen} \alpha$$

- Longitud de la hélice:

(4.209)

$$AB = \frac{\pi d_p}{\cos \alpha} = \frac{P_h}{\operatorname{sen} \alpha}$$

Un tornillo sinfin puede tener más de un filete. Como se vió, para el paso axial  $p_t$  y el número de filetes  $z_t$ , la (4.201) daba el paso axial de la hélice, resultando que el paso normal es:

$$P_n = \frac{P_h}{z_t} \quad (4.210)$$

En la figura (Fig.4.54) se representa un tornillo sinfin de dos filetes, donde el paso axial de la hélice es igual a dos veces el paso axial entre filetes:

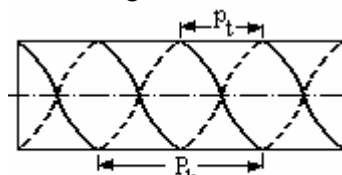


Fig.4.54

$$(4.211)$$

$$(4.212)$$

$$z_t = 2$$

$$P_h = 2 z_t$$

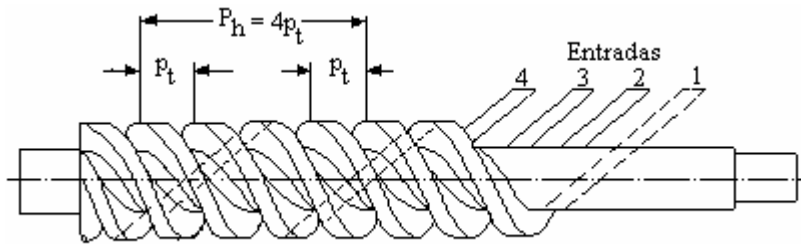


Fig.4.55

En la figura (Fig.4.55) se representa un tornillo sinfín de cuatro filetes o, como también se lo denomina comúnmente, de cuatro entradas. En el se observa el paso axial  $P_h$  de la hélice y el paso axial entre filetes,

siendo:

$$(4.213) \quad P_h = 4p_t$$

### Fórmulas de cálculos de los elementos del tornillo sinfín y rueda

Para posibilitar el correcto engrane entre el tornillo sinfín y la rueda, sus parámetros y detalles constructivos deben poseer para cada uno determinadas características, como además éstos deben guardar ciertas relaciones entre ambos, las cuales se indican a continuación:

- Diámetro primitivo de la rueda:  $D_p = z_R M_c$   
(4.214)

- Paso circunferencial  $p_{cR}$  de la rueda:  $p_{cR} = \frac{\pi D_p}{z_R} = p_t$   
(4.215)

- Paso de la hélice de la rueda:  $P_{hR} = \frac{\pi D_p}{\operatorname{tg} \alpha}$   
(4.216)

- Diámetro de garganta de la rueda:  $D_t = D_p + 2M_n$   
(4.217)

- Diámetro exterior de la rueda:  $D_e = 2\left(r - r \frac{\cos \beta}{2}\right) + D_t$   
(4.218)

- Distancia entre ejes de rueda y tornillo sinfín:  $L = \frac{1}{2}(D_p + d_p)$   
(4.219)

- Diámetro primitivo del tornillo sinfín:  $d_p = d_e - 2M_n$   
(4.220)

- Módulo circunferencial de la rueda:  $M_c = \frac{D_p}{z_R} = \frac{M_n}{\cos \alpha}$   
(4.221)

**Resistencia de los dientes:** Debido a que los dientes de la rueda son más débiles por construcción que los filetes del tornillo sinfín, la resistencia del conjunto se basa en el cálculo de los dientes de la rueda, adecuándose la expresión de Lewis en forma similar a la vista



anteriormente para engranajes helicoidales. Pero como existe una línea de contacto entre los flancos de los filetes del tornillo sinfín y de los dientes de la rueda, hay una mayor fuerza de rozamiento que se debe vencer, por lo que las expresiones de la fuerza normal  $F$  que actúa, haciendo referencia a la figura (Fig.4.41) ya vista, y considerando el coeficiente de rozamiento  $\mu$  entre las superficies en contacto toma la forma siguiente en función de sus componentes axiales y normales:

- Fuerza de entrada en el tornillo sinfín:

$$F_e = F(\cos \varphi_n \operatorname{sen} \alpha + \mu \cos \alpha) = \frac{N_e}{v_{ic}} \quad (4.222)$$

Donde es  $N_e$  la potencia de entrada y  $v_{ic}$  la velocidad circunferencial del tornillo sinfín.

- Fuerza de salida  $F_s$  que actúa sobre la rueda dentada es:

$$F_s = F(\cos \varphi_n \cos \alpha - \mu \operatorname{sen} \alpha) = \frac{N_s}{v_R} \quad (4.223)$$

Siendo  $N_s$  la potencia de salida y  $v_R$  la velocidad circunferencial de la rueda dentada.

#### **Carga de desgaste $F_w$**

La carga de desgaste se puede obtener por la expresión propuesta por Buckingham:

$$F_w = D_p \cdot b_R \cdot K' \quad (4.224)$$

Donde  $b_R$  y  $D_p$  son el ancho de la cara y el diámetro primitivo de la rueda respectivamente, y  $K'$  una constante, y que depende del tipo de material utilizado en la rueda y del ángulo de avance del tornillo sinfín; esta constante se encuentra tabulada para distintos tipos de materiales, como la que se muestra a continuación, para  $F_w$  en kg,  $D_R$  y  $b_R$  en cm y tornillo sinfín de acero endurecido:

Material de la rueda	$K'$
Hierro fundido o semiacero	3,5
Bronce al manganeso	5,6
Bronce al fósforo	7,0
Baquelita u otro material similar	8,8

#### **Rendimiento**

El rendimiento  $\eta$  del mecanismo tornillo sinfín-rueda dentada se lo obtiene considerando la potencia de entrada y la potencia de salida:

$$\eta = \frac{N_s v_R}{N_e v_{ic}} = \frac{(\cos \varphi_n \cos \alpha - \mu \operatorname{sen} \alpha) v_R}{(\cos \varphi_n \operatorname{sen} \alpha + \mu \cos \alpha) v_{ic}} \quad (4.225)$$

Teniendo en cuenta que la velocidad circunferencial  $v_{ic}$  del tornillo sinfín está dada por la expresión:

$$v_{ic} = \frac{\pi d_p n_t}{60} \quad (4.226)$$

Y que además es el paso circunferencial  $p_{cR}$  de la rueda igual al paso axial  $p_t$  del tornillo sinfín:

$$(4.227) \quad p_{cR} = p_t$$

Resultando por lo tanto, por la (4.204):

$$(4.228) \quad v_R = \frac{\pi D_p n_R}{60} = \frac{z_t \cdot p_t n_t}{60}$$

Del cociente entre la (4.228) y la (4.226) se obtiene:

$$(4.229) \quad \frac{v_R}{v_{tc}} = \frac{z_t \cdot p_t}{\pi \cdot d_p} = \frac{P_h}{\pi d_p} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha}$$

Reemplazando en la (4.225) el valor de  $v_R/v_{tc}$  dado por el último miembro de la (4.229), la expresión que da el rendimiento es:

$$(4.230) \quad \eta = \frac{(\operatorname{cos} \varphi_n \operatorname{cos} \alpha - \mu \operatorname{sen} \alpha) \operatorname{sen} \alpha}{(\operatorname{cos} \varphi_n \operatorname{sen} \alpha + \mu \operatorname{cos} \alpha) \operatorname{cos} \alpha}$$

Operando y sustituyendo por sus funciones trigonométricas homónimas la (4.229) resulta finalmente:

$$(4.231) \quad \eta = \frac{\operatorname{cos} \varphi_n - \mu \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{cos} \varphi_n + \mu \operatorname{ctg} \alpha}$$

El coeficiente de rozamiento  $\mu$  depende de la velocidad de deslizamiento  $v_s$  entre el tornillo sinfín y la rueda, la cual se obtiene mediante la siguiente expresión:

$$(4.232) \quad v_s = \frac{v_{tc}}{\operatorname{cos} \alpha}$$

Existen tablas que dan el valor del coeficiente de rozamiento  $\mu$  en función de la velocidad de deslizamiento.

-----()

#### Apuntes de clases extractados de la siguiente bibliografía

TÍTULO	AUTOR	EDITORIAL
- Manual de Engranajes	Darle W. Dudley,	C.E.C.S.A.
- Manual del Constructor de Máquinas	H. Dubbel	Labor
- Elementos de Máquinas	Dr. Ing. O. Fratschner	Gustavo Gili
- Proyecto de Elementos de Máquinas	M. F. Spotts	Reverté
- Manual del Ingeniero Hütte II A	Academia Hütte	Gustavo Gili
- Cálculo de Elementos de Máquinas	Vallance-Doughtie	Alsina
- Manual de Engranajes	Darle W. Dudley	C.E.C.S.A.
- Diseño de Máquinas	Hall-Holowenco-Lau	McGraw-Hill
- Manual del Ingeniero Mecánico de Marks	Baumeister y Marks	Uteha
- Diseño de Elementos de Máquinas	Aguirre Esponda	Trillas
- Diseño en Ingeniería Mecánica	J. Shigley	McGraw-Hill
- Elementos de Máquinas	Pezzano-Klein	El Ateneo

- Mecánica de Taller  
- Elementos de Máquinas  
- Diseño de Elementos de Máquinas  
S.A.

E. Solsona  
Dobrovolski y otros  
V.M. Faires

Alsina  
MIR  
Montaner y Simón