

## 2

**ROZAMIENTO**

El roce o rozamiento es la resistencia o fuerza que oponen los cuerpos en contacto a deslizarse o rodar unos sobre otros. Esta fuerza debida al rozamiento, es contraria al sentido del movimiento y produce como consecuencia una disminución de la velocidad de los móviles, comparados con otros cuyos desplazamientos se realizarían en condiciones ideales, sin rozamiento. Es necesario, además, transformar parte de la energía utilizada en mover el cuerpo en un trabajo que se emplea en vencer la resistencia al deslizamiento, y este trabajo pasa al medio exterior bajo la forma de una cantidad de calor equivalente, es el trabajo realizado contra la fuerza de rozamiento.

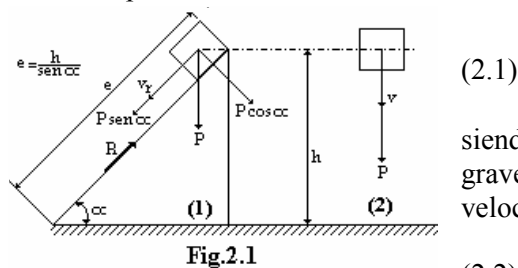
El rozamiento se produce entre cuerpos cualquiera sea su estado, sólido-sólido, sólido-líquido, sólido-gas, líquido-líquido, líquido-gas, gas-gas.

El rozamiento puede ser beneficioso o perjudicial. Cuando es de utilidad se trata de aumentarlo, como es el caso de los frenos, correas, etc. Cuando no es de utilidad, se trata de eliminarlo o por lo menos de disminuirlo, como es el caso de cojinetes y ejes, engranajes, etc.; para ello se utilizan diferentes medios, como ser superficies especiales, lubricación, etc.

Según se produzca deslizamiento entre los cuerpos o uno rueda sobre el otro, se distinguen dos tipos de rozamiento: *rozamiento de deslizamiento o de primera especie* y *rozamiento de rodadura o de segunda especie*.

Rozamiento de primera especie o de deslizamiento

Se produce por deslizarse una superficie sobre otra. Se puede comprobar la existencia del rozamiento experimentalmente: se considera un plano inclinado, cuya altura máxima es  $h$ , según muestra la figura (Fig.2.1-1), y sobre el mismo un sólido que cae; este mismo sólido se lo deja caer en caída libre (Fig.2.1-2) desde la misma altura  $h$  que tiene el plano inclinado. La velocidad final  $v$  de un sólido en función de su velocidad inicial, de su aceleración y del espacio recorrido está dado por:



$$v^2 = v_0^2 + 2ae \quad (2.1)$$

siendo, en la caída libre, la aceleración  $a$  igual a la de la gravedad  $g$  y el espacio  $e$  igual a la altura  $h$ ; además la velocidad inicial es  $v_0 = 0$  por lo que resulta la (2.1):

$$v^2 = 2gh \quad (2.2)$$

o también:

$$v = \sqrt{2gh} \quad (2.3)$$

En el plano inclinado es  $v_0 = 0$  y la aceleración  $a$ :

$$a = g \operatorname{sen} \alpha \quad (2.4)$$

y el espacio  $e$ :

$$e = \frac{h}{\operatorname{sen} \alpha} \quad (2.5)$$

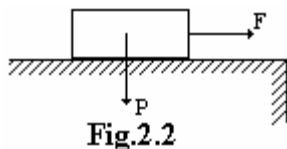
por lo que la (2.1) resulta:

$$v_r^2 = 2g \operatorname{sen} \alpha \cdot \frac{h}{\operatorname{sen} \alpha} = 2gh \quad (2.6)$$

o también:

$$v_r = \sqrt{2gh} \quad (2.7)$$

Es decir que tendrían que ser ambas velocidades iguales, o sea  $v = v_r$ ; pero se comprueba en la práctica que es  $v_r < v$  y ello es debido a la fuerza de rozamiento que se opone al libre desplazamiento del cuerpo sobre el plano inclinado, de donde se deduce su existencia. Otra forma de deducir su existencia es suponer un cuerpo en reposo (Fig.2.2) sobre un plano horizontal.



Si se aplica paulatinamente una fuerza sobre el cuerpo, se observa que cuando alcanza la intensidad  $F$  recién comienza el mismo a moverse, rompiéndose en ese instante el estado de equilibrio. Si es  $P$  la fuerza normal que el cuerpo ejerce sobre la superficie horizontal, se observa que ambas fuerzas están relacionadas por la siguiente

expresión:

$$F = \mu_0 P = R \quad (2.8)$$

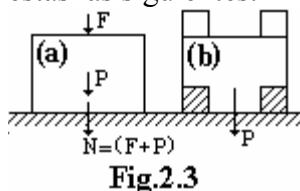
siendo  $\mu_0$  un coeficiente denominado *coeficiente de rozamiento estático*, en *reposo* o *partida*, y  $R$  la *fuerza de rozamiento* que la superficie ejerce sobre el cuerpo oponiéndose al avance del mismo.

La (2.8) puede además escribirse como:

$$\mu_0 = \frac{F}{P} \quad (2.9)$$

siendo en este caso  $\mu_0$  la fuerza a aplicar horizontalmente para mover la unidad de peso o de fuerza normal ejercida sobre la horizontal por el sólido.

Coulomb y Morin formularon leyes que rigen el rozamiento de deslizamiento, siendo estas las siguientes:



**Primera ley:** *la resistencia producida por el roce por deslizamiento es proporcional a la fuerza normal que el cuerpo ejerce sobre la superficie.* En la figura (Fig.2.3-a) se observa la suma de la fuerza  $F$  ejercida sobre el cuerpo más el peso propio  $P$ , lo que da la fuerza  $N$  normal a la superficie, a la que es proporcional la fuerza de rozamiento que se opone al movimiento del cuerpo.

**Segunda ley:** *el coeficiente rozamiento por deslizamiento depende de la naturaleza de las superficies en contacto, pero no de su extensión.* En la figura (Fig.2.3-b) se observa una figura en la cual se disminuye su superficie de contacto retirándose dos porciones de los extremos que se colocan en su parte superior, por lo que el peso del mismo permanece igual, no variando la fuerza de rozamiento.

**Tercera ley:** *una vez comenzado el movimiento, el coeficiente de rozamiento es menor que el correspondiente al reposo y disminuye continuamente con el aumento de velocidad, denominándose en este caso como coeficiente de rozamiento dinámico, siendo:*

$$\mu < \mu_0 \quad (2.10)$$

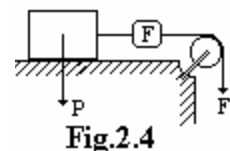
Esto es válido para superficies secas y no para superficies lubricadas ya que en este último caso aparece un *rozamiento de viscosidad del fluido*.

### Determinación experimental del coeficiente de rozamiento

Para la determinación del coeficiente de rozamiento estático se puede proceder de las siguientes formas:

a) Hacer deslizar un cuerpo (Fig.2.4) de peso conocido  $P$ , medir la fuerza  $F$  en el instante límite que comienza el movimiento y se hace el cociente entre  $F$  y  $P$ , obteniéndose  $\mu_0$  según la (2.9):

$$\mu_0 = \frac{F}{P}$$



b) Considerando un cuerpo que se desliza por un plano inclinado, (Fig.2.5), el ángulo  $\varphi$  de inclinación del plano se puede variar de cero hasta un valor  $\varphi_0$  para el cual el sólido comienza a descender. La condición de equilibrio en el momento de iniciarse el movimiento es:

$$T = R \tag{2.11}$$

siendo:

$$T = P \operatorname{sen} \varphi_0 \tag{2.12}$$

$$R = \mu_0 N = \mu_0 P \operatorname{cos} \varphi_0 \tag{2.13}$$

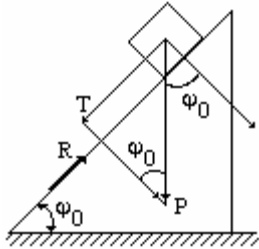


Fig.2.5

Por lo que la (2.11) resulta:

$$P \operatorname{sen} \varphi_0 = \mu_0 P \operatorname{cos} \varphi_0 \tag{2.14}$$

haciendo pasajes de términos y simplificando se obtiene:

$$\mu_0 = \frac{\operatorname{sen} \varphi_0}{\operatorname{cos} \varphi_0} = \operatorname{tg} \varphi_0 \tag{2.15}$$

La (2.15) indica que la tangente trigonométrica del ángulo  $\varphi_0$ , que el plano inclinado forma con la horizontal en el momento de iniciarse el movimiento es igual al coeficiente de rozamiento estático o en reposo.

Angulo y cono de rozamiento

Suponiendo la fuerza  $N$  que el cuerpo  $a$  (Fig.2.6) ejerce normalmente sobre la superficie en que se apoya y  $F$  la fuerza que rompe el equilibrio del cuerpo, haciendo que éste comience a moverse, y, que  $R'$  es la fuerza resultante de  $F$  y  $N$ , ésta forma con la vertical un ángulo  $\varphi_0$  que es el ángulo de rozamiento y cumple la condición:

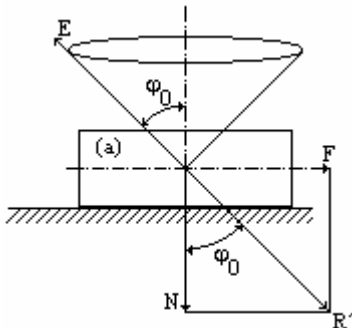


Fig.2.6

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{F}{N} = \mu_0 \tag{2.16}$$

siendo  $\varphi_0 = \operatorname{arctg} \mu_0 \tag{2.17}$

O sea que la tangente del ángulo  $\varphi_0$  equivale al coeficiente de roce estático. Si se considera a  $E$  la equilibrante del sistema de fuerzas  $F$  y  $N$ , se observa que para producir el movimiento del sólido es necesario que  $E$  forme con la vertical el ángulo  $\varphi_0$ ; si la componente  $F$  es mayor que la necesaria para mover el cuerpo, tanto  $R'$  como  $E$  se acercan hacia la horizontal. Es posible por lo tanto, imaginarse un cono llamado de rozamiento, cuyas generatrices forman un ángulo  $\varphi_0$  con la vertical. Si la equilibrante está orientada dentro del cono, es decir, si forma un ángulo menor que  $\varphi_0$ , no es posible producir el desplazamiento del sólido, por cuanto la componente  $F$  no vence el frotamiento proporcional a la fuerza normal  $N$ .

Ecuaciones del movimiento en el plano inclinado con rozamiento

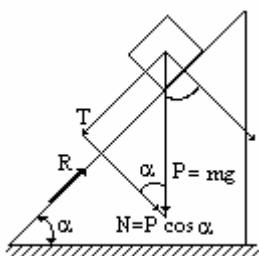


Fig.2.7

Suponiendo que un cuerpo  $c$  cae por un plano inclinado que forma un ángulo  $\alpha$  con la horizontal (Fig.2.7), actuando sobre el mismo, debidas al peso propio  $P = mg$  del cuerpo, las fuerzas:

$$T = P \operatorname{sen} \alpha = mg \operatorname{sen} \alpha \tag{2.18}$$

la que produce su desplazamiento hacia abajo.

$$R = \mu N = \mu P \cos \alpha = \mu mg \cos \alpha \quad (2.19)$$

Siendo  $R$  la fuerza de rozamiento que se opone al avance del cuerpo,  $\mu$  el coeficiente de rozamiento dinámico (del cuerpo en movimiento) menor que el rozamiento estático:

$$\mu < \mu_0 \quad (2.20)$$

El cuerpo cae debido a que es:

$$T > R \quad (2.21)$$

por lo tanto tiene una aceleración  $a$ , existiendo una fuerza resultante que hace que el cuerpo se deslice hacia abajo:

$$T - R = m.a \quad (2.22)$$

Reemplazando  $T$  y  $R$  por sus valores dados por la (2.18) y (2.19) respectivamente en la (2.22), se tendrá:

$$mg \operatorname{sen} \alpha - \mu mg \cos \alpha = m.a \Rightarrow mg(\operatorname{sen} \alpha - \mu \cos \alpha) = m.a; \text{ despejando } a:$$

$$a = g(\operatorname{sen} \alpha - \mu \cos \alpha) \quad (2.23)$$

Si para un tiempo  $t_0 = 0$  es  $v = v_0$  y  $e = e_0$ , para un tiempo  $t$  cualquiera, será:

$$v = v_0 + gt(\operatorname{sen} \alpha - \mu \cos \alpha) \quad (2.24)$$

y

$$e = e_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 (\operatorname{sen} \alpha - \mu \cos \alpha) \quad (2.25)$$

Si el cuerpo asciende por el plano inclinado debido a la velocidad  $v_0$  que posee (Fig.2.8), se tiene:

$$-T - R = m.a \quad (2.25)$$

$$-mg \operatorname{sen} \alpha - \mu mg \cos \alpha = m.a \quad (2.26)$$

De donde es.

$$-(mg \operatorname{sen} \alpha + \mu mg \cos \alpha) = m.a \quad (2.27)$$

Despejando  $a$  de la (2.27):

$$a = -g(\operatorname{sen} \alpha + \mu \cos \alpha) \quad (2.28)$$

Para  $t_0 = 0$  es  $v = v_0$  y  $e = e_0$  y se tendrá:

$$v = v_0 - gt(\operatorname{sen} \alpha + \mu \cos \alpha) \quad (2.29)$$

y

$$e = e_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 (\operatorname{sen} \alpha + \mu \cos \alpha) \quad (2.30)$$

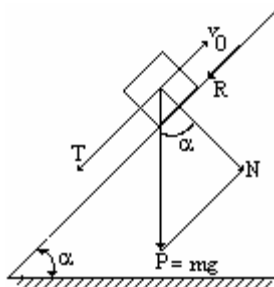


Fig.2.8

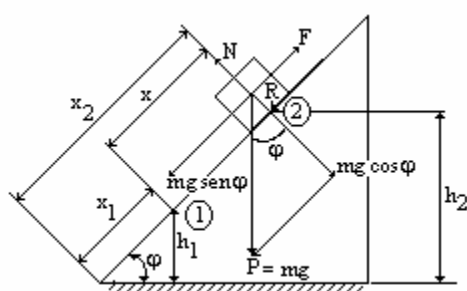


Fig.2.9

### Trabajo contra la fuerza de rozamiento

Considerando el plano inclinado de la figura (Fig.2.9), se puede realizar un análisis de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, considerando las fuerzas

exteriores, el peso propio del cuerpo y la fuerza de rozamiento y el trabajo necesario para vencer esta última, que se opone al movimiento del mismo. Suponiendo que sobre el cuerpo de peso  $P = mg$  se ejerce una fuerza  $F = m.a$  para lograr su ascenso, se tendrá, según la sumatoria de las fuerzas que intervienen:

$$F - mg \cdot \text{sen } \varphi - R = m.a = m.v \frac{dv}{dx} \tag{2.31}$$

$$F dx - mg \cdot \text{sen } \varphi dx - R dx = m v dv \tag{2.32}$$

Integrando entre  $x_1$  y  $x_2$  correspondiendo en cada punto para  $v$ ,  $v_1$  y  $v_2$  respectivamente y haciendo pasaje de términos:

$$F(x_2 - x_1) = \frac{1}{2} (m v_2^2 - m v_1^2) + mg(x_2 \text{sen } \varphi - x_1 \text{sen } \varphi) - R (x_2 - x_1) \tag{2.33}$$

Si fuera  $F = 0$ , se tendrá:

$$\frac{1}{2} m v_2^2 + m g h_2 = (\frac{1}{2} m v_1^2 + m g h_1) - R (x_2 - x_1) \tag{2.34}$$

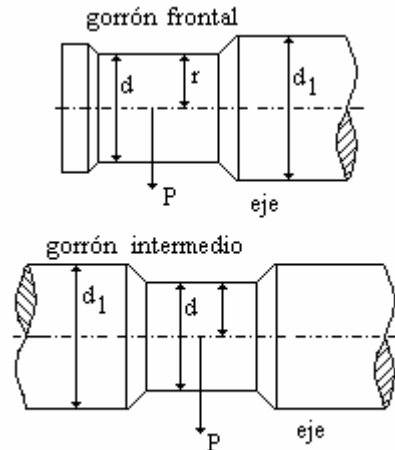
Siendo el primer miembro la energía total en el punto 2 y el segundo miembro la energía total en el punto 1 menos la energía empleada en el trabajo para vencer la fuerza de rozamiento  $R$ .

Trabajo de rozamiento en gorriones

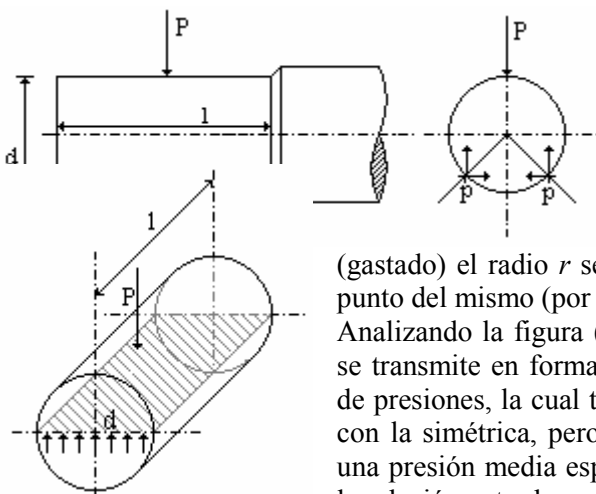
Los árboles y ejes descansan sobre cojinetes directamente, o más comúnmente por medio de gorriones, los cuales pueden ser frontales o intermedios (Fig.2.10).

Entre el gorrón y el cojinete sin lubricación se produce un rozamiento, debido al contacto de ambas superficies laterales circulares, que es considerado de *primera especie*. Estos cojinetes reciben el nombre de cojinetes de deslizamiento o de fricción. En los de bolas o rodillos se produce un rozamiento de *segunda especie* o de *rodadura*, denominándose de *antifricción*.

La distribución de la presión entre ambas superficies dependerá de la elasticidad de ambos metales y del huelgo



**Fig.2.10**



**Fig.2.11**

o diferencia entre los diámetros del gorrón y del cojinete. Cuando los cojinetes son nuevos, la presión se distribuye en forma uniforme debido a la adaptación perfecta existente entre ambas piezas. Si el gorrón es usado (gastado) el radio  $r$  se transforma en el radio  $y$  variable para cada punto del mismo (por desgaste desparejo). Analizando la figura (Fig.2.11), y teniendo en cuenta que la carga se transmite en forma radial al gorrón, con una distribución radial de presiones, la cual tiene una componente horizontal que se anula con la simétrica, pero no así la componente vertical, que produce una presión media específica, siendo esta presión media específica la relación entre la carga  $P$  y la sección diametral del gorrón:

$$p = \frac{P}{d.l} = \frac{P}{2.r.l} \quad (2.35)$$

Siendo  $d$  y  $r$  el diámetro y radio respectivamente del gorrón que apoya en una longitud  $l$  sobre el cojinete.

La carga  $P$  ejercida sobre el gorrón produce una fuerza de resistencia por rozamiento  $R$  entre las superficies del eje y cojinete en contacto cuando el eje gira con una velocidad angular  $\omega$  dentro del cojinete, siendo  $M$  el momento debido a esta fuerza. Analizando en la figura (2.12), para un gorrón desgastado de radio  $y$ , que está sometido a una carga vertical  $P$  que es transmitida al cojinete de longitud  $l$ , la presión específica  $p$  que se produce, el coeficiente de rozamiento  $\mu$  y considerando que la superficie diferencial  $dS$  es:

$$dS = r.l.d\varphi \quad (2.36)$$

y siendo  $dN$  la fuerza normal a la superficie  $dS$  se tiene:

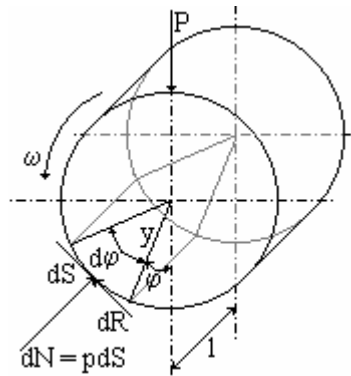
$$dN = p.dS = p.r.l.d\varphi \quad (2.37)$$

La fuerza de rozamiento que se opone al giro del eje es:

$$dR = \mu.dN = \mu.p.r.l.d\varphi \quad (2.38)$$

resultando el momento de rozamiento  $dM$ :

$$dM = y.dR \quad (2.39)$$



**Fig.2.12**

Integrando la (2.39), suponiendo  $\mu$  constante:

$$M = \int y dR = \int \mu.p.r.l.d\varphi.y \quad (2.40)$$

Si el gorrón es nuevo es  $y = r = \text{constante}$  y la presión  $p$  en toda la superficie del mismo se mantiene constante, resultando por lo tanto la (2.40):

$$M = \mu p.r^2.l \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \mu.p.r^2.l.\pi \quad (2.41)$$

y como es por la (2.35)  $p = \frac{P}{2.r.l}$  resulta para el momento  $M$ :

$$M = \mu \frac{r^2.l.\pi.P}{2.r.l} = \mu.r.\frac{\pi}{2}.P \quad (2.42)$$

Se puede hacer:

$$\mu_1 = \mu \frac{\pi}{2} \quad (2.43)$$

Por lo que la (2.42) resulta:

$$M = \mu_1.r.P = 1,57\mu.P.r \quad (2.44)$$

El coeficiente  $\mu_1$  se lo denomina coeficiente de rozamiento del gorrón.

La potencia  $N_R$  consumida en el trabajo de rozamiento para la velocidad angular  $\omega$ , siendo:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} \left( \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right) \quad (2.45)$$

es:

$$N_R = M\omega = \mu_1 P \cdot r \omega = \mu_1 P \cdot r \frac{\pi n}{30} \quad (2.46)$$

Para  $P$  en kg fuerza,  $\omega$  en radianes/s,  $r$  en metro la potencia resulta en kgm/s y multiplicando por  $\frac{1}{75} \frac{CV}{kgm/s}$  se la obtiene en CV. Si  $P$  está en Newton (N),  $\omega$  en rad/s,  $r$  en metro la potencia está dada en J/s = vatios.

### Trabajo de rozamiento en pivotes o quicios

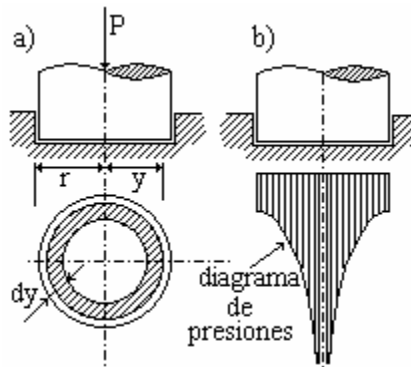


Fig.2.13

Cuando un eje recibe una carga axial  $P$  y la transmite a un apoyo, su extremidad recibe el nombre de *pivote* o *quicio*. Se presentan distintos tipos y estados de pivotes: *a*- pueden ser nuevos, sin desgaste, radio  $r$  constante; *b*- usados, con desgaste, radio  $y$  variable; *c*- macizos, único radio  $r$  y *d*- con agujero central, radios  $r_1$  y  $r_2$ . El radio  $y$  en el caso de pivotes usados, podrá variar de  $0$  a  $r$  para pivotes macizos y de  $r_1$  a  $r_2$  para pivotes con agujero central.

Para el caso *a*), considerando la superficie diferencial de la corona de radio  $y$  y espesor  $dy$  según muestra la figura (Fig.2.13-a) es:

$$dS = 2\pi y dy \quad (2.47)$$

La fuerza  $dP$  que se ejercerá sobre ella debido a la presión superficial específica  $p$  es:

$$dP = p \cdot 2\pi y dy \quad (2.48)$$

Integrando la (2.48) para  $P$  variando entre  $0$  y  $P$  y el radio  $y$  según lo ya establecidos precedentemente se tiene:

$$P = \int_0^P dP = \int_{r_1}^{r_2} 2\pi \cdot p \cdot y \cdot dy \quad (2.49)$$

La fuerza de rozamiento  $dR$  considerando la (2.48) y el coeficiente de rozamiento  $\mu$ , el cual se conserva constante, se tendrá:

$$dR = \mu \cdot dP = \mu p \cdot 2\pi y dy \quad (2.50)$$

o integrando la (2.50):

$$R = \int_0^P \mu dP = \int_{r_1}^{r_2} \mu p 2\pi y dy \quad (2.51)$$

y el momento  $dM_R$  debido a la fuerza de rozamiento  $dR$  es:

$$dM_R = y \cdot dR \quad (2.52)$$

o integrando la (2.52) para  $R$  variando entre  $0$  y  $R$ :

$$M_R = \int_0^R y dR = \int_{r_1}^{r_2} \mu p 2\pi y dy \quad (2.53)$$

Si el pivote es nuevo la presión  $p$  se mantiene constante a lo largo del radio, es decir desde  $0$  a  $r$ . Si el pivote es usado, la presión  $p$  varía con el radio  $y$ , debiendo conocerse la función de variación, pero se ha podido comprobar que el desgaste en la superficie de apoyo del pivote es uniforme para cada longitud del radio considerado. Además, este desgaste es proporcional a la

presión  $p$  y a la velocidad tangencial  $v$ . Experimentalmente se obtiene que muy aproximadamente el producto  $p.v$  se mantiene constante; es decir:

$$p.v = \text{constante} \quad (2.54)$$

pero como es  $v = \omega.y$  será  $p.\omega.y = \text{constante}$ ; como es  $\omega = \text{constante}$  debe ser también  $p.y = \text{constante}$ . Aplicando este análisis a los casos  $a, b, c$  y  $d$  ya mencionados, podemos obtener las expresiones de la presión  $p$  y del momento  $M_R$  debido a la fuerza de rozamiento  $dR$ .

**1-Caso ac) Pivote nuevo macizo:** para este caso  $y$  varía desde  $0$  a  $r$ ;  $p = \text{constante}$ . Integrando la (2.49) y (2.53) para las condiciones mencionadas se obtiene:

$$\text{Para la (2.49)} \quad P = 2\pi p \int_0^r y dy = p \pi r^2 \quad (2.55)$$

Despejando la presión  $p$  de la (2.55) se llega finalmente a:

$$p = \frac{P}{\pi r^2} \quad (2.56)$$

$$\text{para la (2.53):} \quad M_R = 2\pi \cdot p \cdot \mu \int_0^r y^2 dy = \frac{2\pi}{3} \mu p r^3 \quad (2.57)$$

y reemplazando en la (2.57)  $p$  según la (2.56):

$$M_R = \frac{2}{3} \mu P r \quad (2.58)$$

**2-Caso bc) Pivote usado macizo:** para este caso  $y$  varía desde  $0$  hasta  $r$ ; además según lo visto anteriormente es  $p.y = \text{constante}$ . Integrando la (2.49) y la (2.53) para las condiciones mencionadas se obtiene:

$$\text{Para la (2.49)} \quad P = 2\pi p y \int_0^r dy = 2\pi p y r \quad (2.59)$$

Despejando la presión  $p$  de la (2.59) se obtiene para  $p$  la expresión:

$$p = \frac{1}{2} \frac{P}{\pi y r} \quad (2.60)$$

$$\text{Para la (2.53)} \quad M_R = 2\pi p y \mu \int_0^r y dy = \pi p y \mu r^2 \quad (2.61)$$

y reemplazando en la (2.61) el valor de  $p$  dado por la (2.60):

$$M_R = \frac{1}{2} \mu P r \quad (2.62)$$

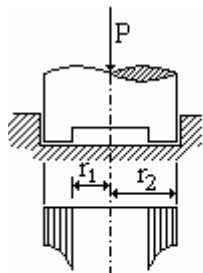


diagrama de presiones  
para pivote con  
agujero central

**Fig.2.14**

Para estos caso de pivote macizo, si se observan las expresiones (2.56) y (2.60) se podrá notar que la presión en el pivote, a medida que  $r$  se acerca a cero, crece hasta valores muy grandes, y para cero se haría infinito, lo que puede notarse en el diagrama de presiones de la figura (Fig.2.13-b); si bien esta última situación no se da ya que las consideraciones hechas son aproximadas, las presiones que se producen son muy grandes, motivo por el cual se construyen los pivotes con un agujero central (fig.2.14), como se verá a continuación, a efectos de



eliminar las presiones en el centro.

**3-Caso ad) Pivote nuevo con agujero central:** para este caso es  $p$  constante atendiendo que  $r$  no varía al no haber desgaste; además se tienen los valores de los radios interno  $r_1$  y externo  $r_2$  del agujero central. Integrando la (2.49) y (2.53) para las condiciones mencionadas:

$$\text{Para (2.49)} \quad P = 2\pi p \int_{r_1}^{r_2} y dy = p\pi (r_2^2 - r_1^2) \quad (2.63)$$

Despejando  $p$  de la (2.63) en función de  $P$ :

$$p = \frac{P}{\pi (r_2^2 - r_1^2)} \quad (2.64)$$

$$\text{Para (2.53)} \quad M_R = 2\pi \mu p \int_{r_1}^{r_2} y^2 dy = \frac{2}{3} \pi \mu p (r_2^3 - r_1^3) \quad (2.65)$$

Reemplazando en la (2.65) el valor de  $p$  dado por la (2.64) se obtiene:

$$M_R = \frac{2}{3} \mu P \frac{r_2^3 - r_1^3}{r_2^2 - r_1^2} \quad (2.66)$$

**4-Caso bd) Pivote usado con agujero central:** para este caso es  $p \cdot y =$  constante variando  $y$  desde  $r_1$ , radio interno del agujero central del pivote a  $r_2$ , radio externo del mismo. Integrando la (2.49) y (2.53) para estas condiciones:

$$\text{Para la (2.49)} \quad P = 2\pi p y \int_{r_1}^{r_2} dy = 2\pi p y (r_2 - r_1) \quad (2.67)$$

Despejando de la (2.67) el valor de  $p$  se obtiene:

$$p = \frac{P}{2\pi (r_2 - r_1)} \quad (2.68)$$

Para (2.53):

$$M_R = \int_{r_1}^{r_2} y dR = 2\pi \mu p y \int_{r_1}^{r_2} y dy = \pi \mu p y (r_2^2 - r_1^2) \quad (2.69)$$

Reemplazando en la (2.69) el valor de  $p$  dado por la (2.68) se obtiene:

$$M_R = \frac{1}{2} P \mu (r_2 + r_1) \quad (2.70)$$

La potencia para estos casos vistos se la obtiene multiplicando el momento contra la fuerza de rozamiento por la velocidad angular con que gira el pivote:

$$N_R = M_R \omega = M_R \frac{\pi n}{30} \quad (2.71)$$

### Medición de potencias mediante frenos dinamométricos

Se utilizan para medir la potencia efectiva existente en los ejes de los motores de combustión interna, de vapor, eléctricos, etc. Los más usuales son el de Prony, el de Navier y el de Froude o de Thorneycroft. Los dos primeros son del tipo de absorción de la potencia del motor para realizar un trabajo que venza al realizado por la fuerza de rozamiento en tanto que el de Froude se utiliza la potencia del motor para realizar un trabajo.

**Freno de Prony:** consta de dos zapatas  $a$  y  $a'$  (Fig.2.15) que abrazan al eje cuya potencia se quiere medir, recubiertas, en la zona de contacto, de material especial para realizar la fuerza necesaria en la fricción y para resistir las altas temperaturas y esfuerzos mecánicos a que son sometidas. Las dos zapatas están unidas por dos pernos roscados que cuentan con tuercas para

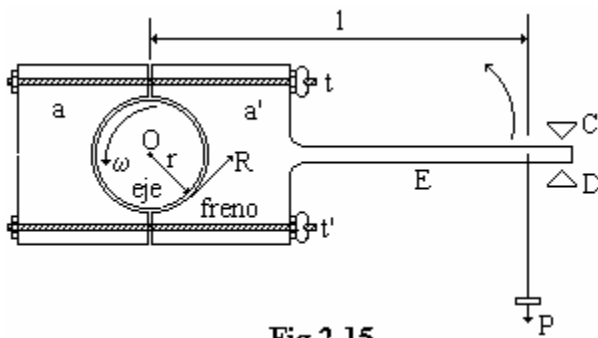


Fig.2.15

ajustarlas al eje y regular la presión que ejercen sobre el mismo. Cuando el eje gira según el sentido que indica la figura (Fig.2.15) con una velocidad angular  $\omega$ , el brazo  $E$  tiende a tocar el tope  $C$ , por lo cual es necesario colocar el peso  $P$  para dejarlo en equilibrio entre los topes  $C$  y  $D$ . En estas condiciones el trabajo del motor se consume por el rozamiento en el freno, y debido al equilibrio puede determinarse la fuerza de roce con ayuda del peso  $P$ . Llamando  $R$  a la fuerza de rozamiento que

se produce sobre la zapata al girar el eje y arrastrarla, y tomando momentos con respecto al centro  $O$ , resulta:

$$R - P.l = 0 \quad (2.72)$$

De donde se puede obtener  $R$ :

$$R = \frac{P.l}{r} \quad (2.73)$$

y el momento de rozamiento  $M_R$  es:

$$M_R = R.r = \frac{P.l}{r} . r = P.l \quad (2.74)$$

La potencia efectiva  $N_R$  para la velocidad angular  $\omega$  es:

$$N_R = M_R . \omega = R.r . \frac{\pi n}{30} = \frac{2\pi n P.l}{60} \quad (2.75)$$

estando  $N_R$  en Watts para  $P$  en Newton,  $l$  en metros y  $n$  en rpm. Si estuviera  $P$  dado en kg fuerza,  $l$  en metros y  $n$  en rpm, la expresión (2.75) dividida por 75 CV/kgm resulta en CV:

$$N_R = \frac{2\pi n . P.l}{75.60} \quad (2.76)$$

**Freno de Navier:** el eje del motor está rodeado por una cinta que ejerce, debido al rozamiento, una fuerza que se opone al giro del eje (Fig.2.16). En un extremo de la cinta se coloca un dinamómetro el cual está sujeto al piso, colocándose en el otro extremo un peso tensor  $Q$ . En el

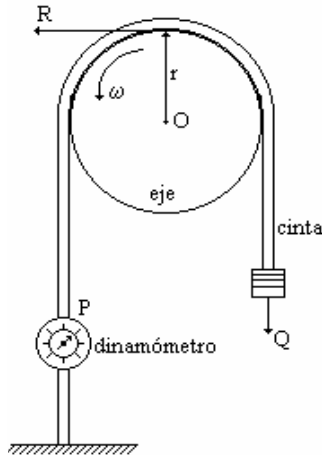


Fig.2.16

el dinamómetro se lee la fuerza de tracción  $P$  que se ejerce en un extremo del cable, debido al peso  $Q$  y fuerza de rozamiento  $R$  ejercida por el eje sobre la cinta. Para el sentido de rotación de la figura, el tramo de mayor tensión es el de la derecha, pues además de soportar el esfuerzo  $Q$  de frenado, recibe también la fuerza que hace el tambor para arrastrar la cinta en su rotación, resultando por lo tanto con menor tensión el tramo de la izquierda.

Por lo tanto, la diferencia de los esfuerzos en la cinta valdrá, tomando momento respecto al centro  $O$  del eje:

$$Q.r = R.r + P.r \tag{2.77}$$

Simplificando  $r$  y haciendo pasajes de términos se obtiene:

$$Q = R + P \Rightarrow R = Q - P \tag{2.78}$$

y el momento de rozamiento será:

$$M_R = R.r = (Q - P).r \tag{2.79}$$

y la potencia será:

$$N_R = M_R.\omega = (Q - P)r \frac{2\pi n}{60} \tag{2.80}$$

en Watts para  $M_R$  en Joule,  $Q$  y  $P$  en Newton y  $n$  en rpm.

**Freno de Froude o Thorneycroft:**

La polea I, que está sobre el eje motor  $O_1$  y del cual se desea medir la potencia, gira a  $n$  rpm arrastrando mediante una correa al mecanismo formado por un sistema de poleas II, III y IV que giran sobre ejes  $O_2$ ,  $O_3$  y  $O_4$  respectivamente, estando los dos últimos sobre un bastidor, según muestra la figura (Fig.2.17), transmitiéndole un movimiento de

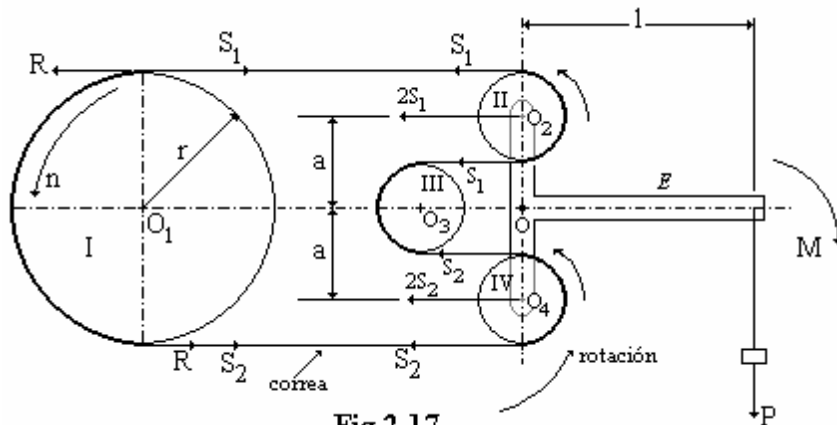


Fig.2.17

rotación en el sentido antihorario.

Debido a ello se producen los esfuerzos  $S_1$  y  $S_2$  en la rama superior e inferior de la correa respectivamente, siendo:

$$S_1 > S_2$$

$$(2.81)$$

ya que el tramo superior, que envuelve a la polea II se encuentra traccionado y el tramo inferior, que envuelve a la polea IV, está comprimido, debido al sentido de las fuerzas

de rozamiento en cada uno de ellos. Como resultado de los esfuerzos en la correa se produce una resultante  $2S_1$  aplicada en  $O_2$  y una resultante  $2S_2$  en  $O_4$ . El bastidor tiende a girar alrededor de "O" pero es equilibrado por un momento  $M$  que se produce por el peso  $P$  de un sistema de pesas que se encuentra en el extremo de la palanca  $E$ .

Si la distancia entre los centros II y III y III y IV es la misma e igual a  $a$ , tomando momentos respecto de  $O$  se tiene:

$$2S_1 \cdot a - 2S_2 \cdot a - P \cdot l = 0 \quad (2.82)$$

Operando en la (2.82)

$$S_1 - S_2 = \frac{P \cdot l}{2 \cdot a} \quad (2.83)$$

En la polea I, tomando momento respecto a  $O_1$  se tiene:

$$S_1 \cdot r = R \cdot r + S_2 \cdot r \quad (2.84)$$

de la cual se obtiene:

$$R = S_1 - S_2 \quad (2.85)$$

Por lo tanto, el momento de rotación debido a la fuerza de rozamiento  $R$  valdrá:

$$M_R = (S_1 - S_2) \cdot r \quad (2.86)$$

y de la (2.83) y (2.86) se obtiene:

$$M_R = \frac{P \cdot l}{2 \cdot a} r \quad (2.87)$$

y la potencia efectiva para las  $n$  rpm es:

$$N = M_R \cdot \omega = \frac{P \cdot l}{2 \cdot a} r \frac{2\pi n}{60} = \frac{P \cdot l \cdot r}{a} \frac{\pi n}{60} \quad (2.88)$$

### **Frenos de zapata**

Están constituidos por una o más zapatas o mordazas de material especial para la fricción, que se comprimen, mediante el momento generado por la acción de una palanca, contra la superficie del tambor del freno, el cual está girando a una velocidad angular  $\omega$ , produciendo la acción de frenado por el rozamiento existente entre las superficies del tambor y de la zapata. La articulación de la palanca de accionamiento se encuentra unida a una parte fija o bancada de la máquina. Conociendo la potencia  $N$  se conoce el momento de rotación  $M$ :

$$N = M \cdot \omega \Rightarrow M = \frac{N}{\omega} \quad (2.89)$$

La fuerza tangencial  $T$ , debido al rozamiento, sobre la zapata valdrá:

$$T = \frac{M}{r} = \frac{N}{\omega \cdot r} \quad (2.90)$$

la fuerza de rozamiento  $R$  sobre el tambor, debido a la fuerza normal  $P$ , es:

$$R = \mu P \quad (2.91)$$

Siendo además el momento  $M$  respecto de  $O$ :

$$M = T \cdot r = R \cdot r \quad (2.92)$$

$$\text{resultando:} \quad R = \mu P = T = \frac{M}{r} \quad (2.93)$$

Se pueden presentar los siguientes casos:

**Primer caso:** El punto  $A$  de apoyo de la palanca está por debajo de la recta de acción de la fuerza de rozamiento  $T$  sobre la zapata (Fig.2.18).

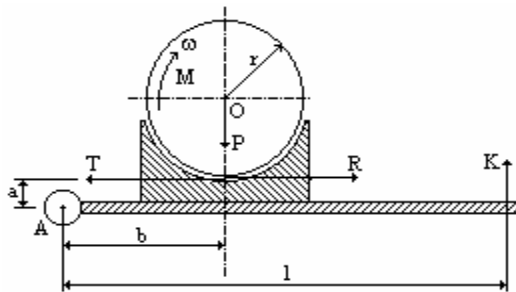


Fig.2.18

Para determinar la fuerza  $K$  que se debe realizar sobre la palanca para producir el frenado, se toman los momentos de las fuerzas actuantes respecto de  $A$ :

$$K \cdot l - P \cdot b + T \cdot a = 0 \quad (2.94)$$

$$K \cdot l = P \cdot b - T \cdot a \quad (2.95)$$

Reemplazando  $T$  por  $\mu P$  según la (2.93) en la (2.95) se obtiene:

$$K \cdot l = P \cdot b - \mu P \cdot a \Rightarrow K \cdot l = P \cdot b \cdot \mu \left( \frac{1}{\mu} - \frac{a}{b} \right) \quad (2.96)$$

Y despejando  $K$  de la (2.96):

$$K = \frac{P \cdot b \cdot \mu}{l} \left( \frac{1}{\mu} - \frac{a}{b} \right) \quad (2.97)$$

Por la (2.90) y (2.92) la (2.97) se puede escribir:

$$K = \frac{N}{\omega \cdot r} \frac{b}{l} \left( \frac{1}{\mu} - \frac{a}{b} \right) \quad (2.98)$$

Si se invierte el sentido de rotación se obtiene:

$$K = \frac{N}{\omega \cdot r} \frac{b}{l} \left( \frac{1}{\mu} + \frac{a}{b} \right) \quad (2.99)$$

**Segundo caso:** El punto  $A$  de apoyo de la palanca está por encima de la recta de acción de la fuerza de rozamiento  $T$  sobre la zapata (Fig.2.19). Tomando momentos respecto de  $A$  de las fuerzas actuantes se obtiene:

$$K.l - P.b - T.a = 0 \quad (2.100)$$

Reemplazando la fuerza  $T$  por su igual  $R = \mu.P$ , en la (2.100) y operando se obtiene:

$$K = \frac{P.b.\mu}{l} \left( \frac{1}{\mu} + \frac{a}{b} \right) \quad (2.101)$$

y por la (2.90) y la (2.92) la (2.101) se puede escribir:

$$K = \frac{N}{r.\omega} \left( \frac{1}{\mu} + \frac{a}{b} \right) \quad (2.102)$$

Invirtiendo el sentido de rotación se obtiene:

$$K = \frac{N}{r.\omega} \left( \frac{1}{\mu} - \frac{a}{b} \right) \quad (2.103)$$

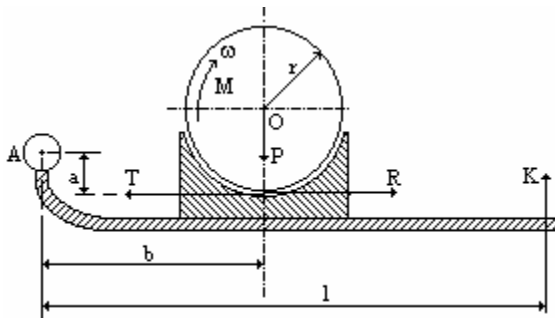


Fig.2.19

**Tercer caso:** el punto  $A$  de apoyo de la palanca está en la recta de acción de la fuerza de rozamiento sobre la zapata  $T$  (Fig.2.20).

Para este caso es  $a = 0$ , por lo tanto, el momento de la fuerza  $T$  es nulo, por lo tanto, los momentos de  $K$  y  $P$  deben equilibrarse mutuamente, resultando:

$$K.l - P.b = 0 \quad (2.104)$$

Despejando de la (2.104) la fuerza  $K$  se obtiene:

$$K = \frac{P.b}{l} = \frac{T.b}{\mu.l} \quad (2.105)$$

y por la (2.90) y (2.92) se puede escribir:

$$K = \frac{N}{r.\omega} \frac{b}{\mu.l} \quad (2.106)$$

Este valor de  $K$  es para cualquier sentido de rotación del tambor.

### Rozamiento de segunda especie

Cuando rueda un cuerpo cilíndrico sin deslizamiento sobre una superficie plana horizontal (Fig.2.21), surge una resistencia debido a la compresibilidad de las superficies de contacto y a la deformación entre el cuerpo y el apoyo. Esta resistencia se llama *rozamiento de segunda especie o de rodadura*. Sus leyes se establecen de acuerdo con las experiencias realizadas por Coulomb.

Debido a la deformación entre las superficies en contacto las dos fuerzas paralelas  $P$  y  $F$  producen una reacción que vale:

$$R' = P + F \quad (2.107)$$

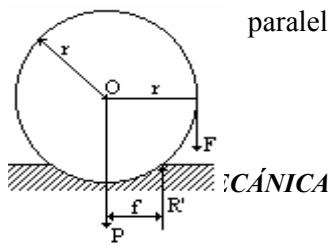


Fig.2.21

La cual está aplicada a la distancia  $f$  de la recta de acción del peso  $P$  y en el centro de la superficie deformada. Para determinar  $F$  consideraremos el equilibrio de momentos con respecto al centro  $O$  del cuerpo cilíndrico:

$$R'.f - F.r = 0 \quad (2.108)$$

Reemplazando el valor de  $R'$  dado por la (2.103):

$$F.r = R'.f = (P + F).f \quad (2.109)$$

Despejando de la (2.105)  $f$ :

$$f = \frac{F.r}{R'} = \frac{F.r}{P'+F} \quad (2.110)$$

o también:

$$F = R'. \frac{f}{r} \quad (2.111)$$

El rozamiento de rodadura está regido por las siguientes leyes:

**Primera ley:** la fuerza  $F$  con que se vence la resistencia de rozamiento es proporcional a la reacción  $R'$ , o sea, a la carga soportada por la superficie:

$$F \propto R' \quad (2.112)$$

**Segunda ley:** la fuerza  $F$  varía con el valor de  $f$ , el cual depende de la deformación producida, o sea de la naturaleza de las superficies.

La magnitud  $f$  se denomina *coeficiente de rozamiento de segunda especie* o *de rodadura*. Sus valores, obtenidos de acuerdo con la experiencia se encuentran tabulados. El valor de  $f$  está en centímetros y es un brazo de palanca.

Si se considera el movimiento del cilindro por la acción de una fuerza  $F$  horizontal (Fig.2.22), el mismo se produce debido a la reacción:

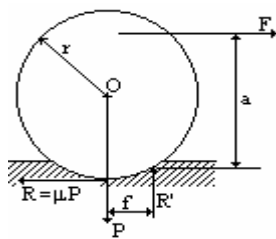


Fig.2.22

$$R = -F \quad (2.113)$$

llamada adherencia o rozamiento de primera especie, la cual, conjuntamente con  $F$ , forma un par motor, el cual equilibra el par resistente  $P.f$ . Por lo tanto, la ecuación de equilibrio de los momentos de las fuerzas  $P$  y  $F$  con respecto al punto  $m$  es:

$$P.f - F.a = 0 \quad (2.114)$$

De la (2.114) se obtiene:

$$F = \frac{P}{a}.f \quad (2.115)$$

La (2.110) cumple también con las leyes enunciadas. Se debe establecer además una condición adicional para que se produzca rodadura y no deslizamiento. En efecto, si se tiene en cuenta el rozamiento de primera especie, la fuerza debida a éste es:

(2.116)  $R = \mu P$   
 Si al ejercer la fuerza  $F$ , ésta es mayor que la del rozamiento de primera especie, es decir:

(2.117)  $F > \mu P$   
 el cilindro deslizará sin rodar. Para que ruede sin deslizar deberá ser :

(2.118)  $F < \mu P$   
 puesto que por la (2.115) y la (2.118) es:

(2.119)  $F = P \cdot \frac{f}{a} < \mu P$   
 de donde se obtienen las siguientes relaciones:

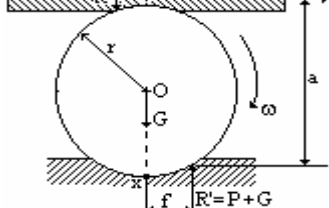
(2.120) a)  $\frac{f}{a} < \mu$       b)  $f < \mu \cdot a$       c)  $\mu < a$

Generalmente es  $f \ll \mu$ , caso de los rodamientos de bolas o rodillos, utilizados cuando se quiere disminuir el rozamiento, o mejor dicho, la fuerza resistente debida a éste.

**Transporte sobre rodillos**

Para el desplazamiento de cuerpos pesados, el esfuerzo a ejercer al sustituir un rozamiento de primera especie por otro de segunda especie, es mucho menor. Si se considera una viga de peso  $P$  que se quiere transportar sobre un rodillo de peso  $G$  (Fig.2.23), siendo  $f'$  el coeficiente de rozamiento por rodadura entre la viga y el rodillo y  $f$  el existente entre el rodillo y el piso, tomando momentos de las fuerzas actuantes respecto al punto  $x$  se tendrá:

(2.121)  $M_x = F \cdot a = R' \cdot f + R'' \cdot f'$



Siendo: (2.122)  $R' = P + G$

Y (2.123)  $R'' = P$

Fig.2.23

Remplazando en la (2.121) los valores de  $R'$  y  $R''$  dados por las (2.122) y (2.123) respectivamente se tendrá:

(2.124)  $F \cdot a = (P + G) \cdot f + P \cdot f'$

Despejando  $F$  de la (2.124):



$$F = \frac{(P + G).f + P.f'}{a}$$

(2.125)

Si en la (2.125) es  $G \ll P$ ,  $f \approx f'$  y  $a = 2r$  la (2.125) se convierte en:

$$F = \frac{2P.f}{2r} = \frac{P.f}{r}$$

(2.126)

Siendo el momento  $M_x$  para este caso:

$$M_x = F.r \quad (2.127)$$

(2.127)

La potencia necesaria para producir el rodamiento, para  $N = M_x \cdot \omega$  siendo  $\omega = \frac{2\pi n}{60}$  y  $n$ (rpm) es:

$$N = F.r.\omega = P.f \frac{\pi n}{30}$$

(2.128)

El momento debido al rozamiento de segunda especie, de acuerdo a la (2.128) resulta:

$$M_R = P.f$$

(2.129)

Si se utilizaran más de un rodillo (Fig.2.24), y se considera que el peso  $P$  de la viga se distribuye de igual forma sobre cada uno de ellos, si son  $z$  rodillos, tendremos sobre cada uno de ellos un peso  $P/z$ ; además, si cada uno de los rodillos pesa  $G$ , la fuerza que ejerce cada rodillo sobre el piso es  $P/z + G$ ; si la fuerza  $F$  se aplica sobre la viga a la distancia  $a$ , la sumatoria de los momentos, según la (2.124) es

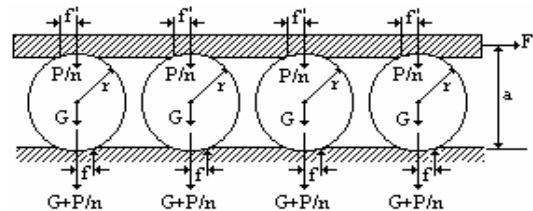


Fig.2.24

$$\frac{P}{z}f' + \frac{P}{z}f' + \dots + \left(\frac{P}{z} + G\right)f + \left(\frac{P}{z} + G\right)f + \dots + \left(\frac{P}{z} + G\right)f - F.a = 0$$

(2.130)

De la (2.130) se obtiene:

$$F = \frac{P.f' + (P + zG).f}{a}$$

(2.131)

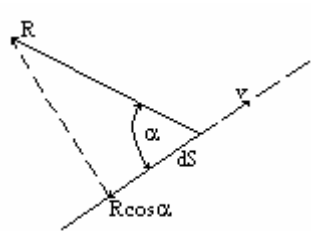
Algunos de los valores medios de  $f$  son:

- Fundición, acero sobre acero:  $f \approx 0,05$  cm.
- Bolas o rodillos de acero templado sobre anillos de acero del mismo material

(cojinetes de rodamientos):  $f \approx 0,005$  a  $0,001$  cm.

### Trabajo absorbido por el rozamiento

Debido a la fuerza resistente producida por el rozamiento de primera especie se produce un trabajo dado por la siguiente expresión, teniendo en cuenta que es  $R$  la fuerza resistente,  $dS$  el camino recorrido por el cuerpo y  $\alpha$  el ángulo que forma la dirección de  $R$  (Fig.2.25):



$$dW = R \cdot dS \cdot \cos \alpha \quad (2.132)$$

Si además el movimiento tiene lugar con una velocidad  $v$ , la potencia  $N_R$  empleada en un tiempo  $dt$  es:

$$N_R = \frac{dW_R}{dt} = R \frac{dS}{dt} \cos \alpha = R \cdot v \cdot \cos \alpha \quad (2.133)$$

Siendo  $R \cdot \cos \alpha$  la proyección de la fuerza resistente en la dirección del desplazamiento y  $v$  la velocidad instantánea del móvil.

Por otra parte, si es  $P$  la resultante de las fuerzas normales al plano de deslizamiento, será:

$$R \cos \alpha = \mu P \quad (2.134)$$

y por lo tanto la (2.132) por la (2.134) resulta:

$$dW_R = \mu P dS \quad (2.135)$$

y la (2.133):

$$N_R = \mu P v \quad (2.136)$$

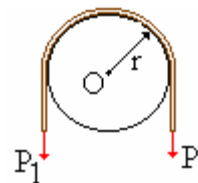
El momento resistente para el rozamiento de segunda especie y la potencia consumida, según la (2.129) y (2.128) siendo  $\omega$  la velocidad angular con que rueda el cuerpo, serán

$$\text{respectivamente } M_R = P f \text{ y } N_R = M_R \omega = M_R \frac{\pi n}{30} \text{ para } \omega = \frac{2\pi n}{60} .$$

### Esfuerzos en órganos flexibles con rozamiento

Al enrollar un órgano flexible (cable, cadena, cuerda o cinta) en una polea o tambor, se produce una deformación en el elemento de tracción, lo cual motiva una resistencia, que se conoce con el nombre de *rigidez de la cuerda*.

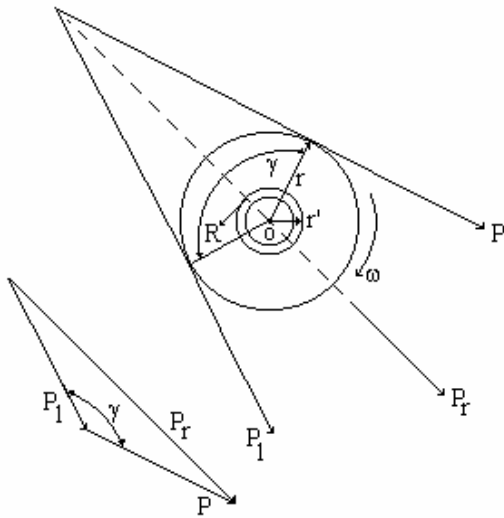
Sea por ejemplo un cable que se enrolla en una polea fija (Fig.2.26). Si se designa con  $P$  el esfuerzo motor y  $P_1$  el esfuerzo en el tramo que soporta la carga, o sea aquel que se mueve hacia la polea, se comprueba que el cable sufre una deformación debida al rozamiento entre los elementos o fibras del cable que producen una resistencia a la curvatura. Se supone que la amplitud de la deformación es igual a  $\xi$



**Fig.2.26**

y además que existe un rozamiento entre el eje y cojinete de la polea. Analizando los esfuerzos que se producen, se observa:

a) **Rozamiento entre eje y cojinete:** la fuerza  $R$  debida al rozamiento es igual a  $P_r$ , resultante de  $P$  y  $P_1$ , por el coeficiente de rozamiento  $\mu_l$ :



**Fig.2.27**

$$R = \mu_l \cdot P_r \quad (2.137)$$

De la figura (Fig.2.26), para  $\gamma \neq 180^\circ$  por el teorema del coseno se tiene:

$$P_r = \sqrt{P^2 + P_1^2 - 2P \cdot P_1 \cos \gamma} \quad (2.138)$$

Si se considera  $P_1 \approx P$  la (2.138) puede escribirse:

$$P_r = \sqrt{2P_1^2 - 2P_1^2 \cos \gamma} \quad (2.139)$$

Operando en la (2.139) se obtiene:

$$P_r = \sqrt{2P_1^2 (1 - \cos \gamma)} \quad (2.140)$$

Por ser  $1 - \cos \gamma = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\gamma}{2}$  la (2.140) se transforma en:

$$P_r = \sqrt{2P_1^2 \cdot 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\gamma}{2}} = \sqrt{4P_1^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\gamma}{2}} \quad (2.141)$$

Extrayendo la raíz cuadrada de la (2.141) se obtiene:

$$P_r = 2P_1 \operatorname{sen} \frac{\gamma}{2} \quad (2.142)$$

Por lo que el momento de rozamiento  $M_{roz}$  entre eje y cojinete será:

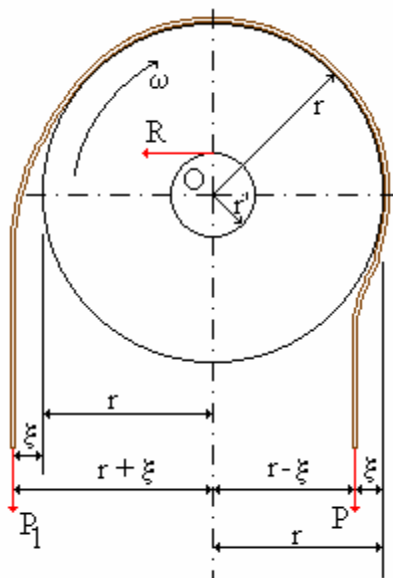
$$M_{roz} = P_r \cdot \mu_l \cdot r' = 2P_1^2 \operatorname{sen} \frac{\gamma}{2} \mu_l r' \quad (2.143)$$

Si es  $\gamma = 180^\circ$  será  $\operatorname{sen} \frac{180}{2} = 1$  y por lo tanto es:

$$(2.144) \quad M_{roz} = 2P_1\mu_1r'$$

**b) Deformación ( $\xi$ ) de la cuerda:** debido al rozamiento interno de los elementos que componen la cuerda, ésta presenta resistencia a amoldarse o cambiar su situación, deformándose de tal manera que la misma influye en los esfuerzos para vencer el peso a levantar.

Analizando la figura (Fig.2.27), en la cual el ángulo que forman los dos extremos de la cuerda es  $\gamma = 180^\circ$ , las fuerzas que actúan y sus momentos con respecto al eje O, tomando la sumatoria de estos últimos se tiene:



**Fig.2.28**

$$(2.145) \quad P ( r - \xi ) = P_1 ( r + \xi ) + 2P_1\mu_1r'$$

Despejando en la (2.145)  $P$  :

$$(2.146) \quad P = P_1 \frac{r + \xi + 2\mu_1r'}{r - \xi}$$

La expresión :

$$(2.147) \quad \frac{r + \xi + 2\mu_1r'}{r - \xi}$$

se la denomina *coeficiente de pérdida de la polea* y se la designa como  $\varepsilon_f$  siendo mayor que la unidad. o sea:

$$\varepsilon_f = \frac{r + \xi + 2\mu_1r'}{r - \xi} > 1 \quad (2.148)$$

y su recíproco es el rendimiento  $\eta_f$  de la polea, menor que la unidad:

$$(2.149) \quad \eta_f = \frac{1}{\varepsilon_f} < 1$$

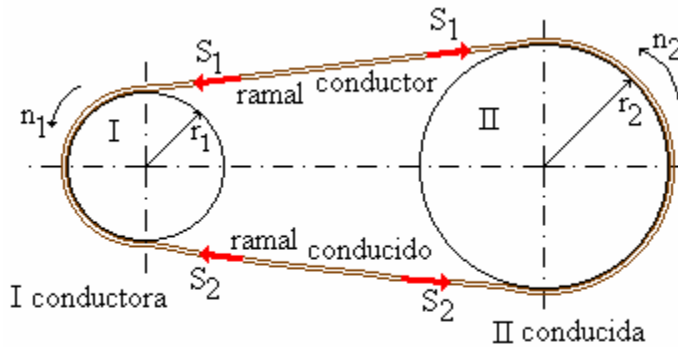
Los valores de  $\varepsilon_f$  se han establecido experimentalmente existiendo fórmulas empíricas para los distintos órganos de tracción. Para los cables y cadenas se adoptan valores de  $\varepsilon_f = 1,04$  a  $1,06$ , resultando rendimientos  $\eta_f = 0,96$  a  $0,94$ .

### **Resistencia al deslizamiento de una lámina sobre un tambor. Teorema de Prony**

Cuando un órgano de tracción (cable, cinta o correa) perfectamente flexible abraza una polea o un tambor o cilindro en movimiento, como indica la figura (Fig.2.29), se constata una diferencia entre los esfuerzos  $S_1$  en el ramal conductor y  $S_2$  en el conducido debido a que se produce una resistencia al deslizamiento por el rozamiento entre el

órgano de tracción (correa) y las poleas. La polea motora tracciona la correa y ésta a su vez hace girar la polea conducida.

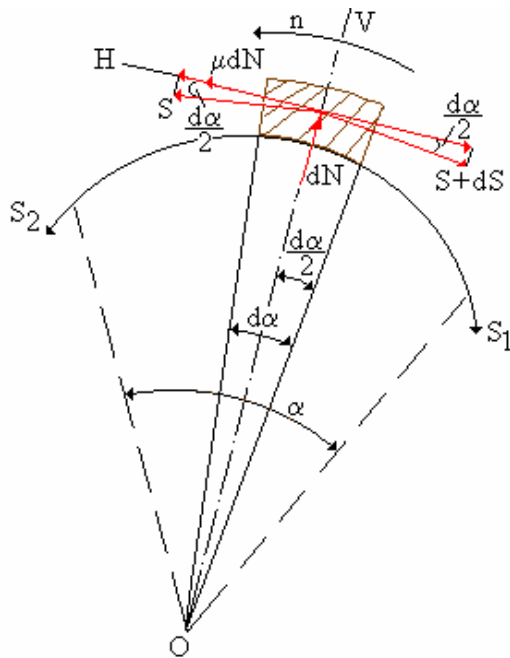
La fuerza de tracción que ejerce la polea conductora I sobre la correa debido al rozamiento existente entre ambos, hace que esta última tienda a alargarse. El rozamiento



que se produce entre la polea conducida II y la correa, al arrastrar ésta a la primera, tiende a frenar el movimiento y traccionar hacia atrás la correa. Por esto el tramo superior está extendido y el inferior tiende a comprimirse debido al rozamiento, motivo por el cual existe una fuerza que empuja la correa desde la conductora I a la

**Fig.2.29**

conducida II, y también por el rozamiento existe una fuerza que la conducida ejerce sobre la correa empujándola hacia la conductora, verificándose que  $S_1 > S_2$ , estando el ramal superior (conductor) extendido y tirante, y el inferior o conducido.



Considerando una correa que envuelve una polea de radio  $r$  con un cierto ángulo  $\alpha$ , llamado *ángulo de contacto*, y un diferencial de ángulo  $d\alpha$  al cual corresponde una longitud diferencial de arco de correa  $r \cdot d\alpha$  y sobre la cual actúa una fuerza normal  $dN$  produciendo una fuerza de rozamiento  $\mu dN$  en la dirección tangencial. Si el tramo conductor es el de la derecha, los esfuerzos en los extremos de la longitud del diferencial de correa  $r \cdot d\alpha$  serán  $S$  y  $S + dS$ , normales a las secciones de la misma y que forman un

$$\frac{d\alpha}{2}$$

ángulo  $\frac{d\alpha}{2}$  con la tangente a la polea.

En un momento determinado, considerando que la correa no desliza sobre la polea y la velocidad de rotación  $n$  se mantiene constante, las cuatro fuerzas mencionadas se encontrarán en equilibrio.

**Fig.2.30**

Considerando un sistema de ejes formado por la tangente (H) a la polea y la perpendicular (V) a la misma que pasa por el centro del arco  $r \cdot d\alpha$  y haciendo la sumatoria de las proyecciones de las fuerzas actuantes sobre este sistema de ejes, se obtiene:

$$(2.150) \quad \sum H \equiv (S + dS) \cdot \cos \frac{d\alpha}{2} = \mu dN + S \cdot \cos \frac{d\alpha}{2}$$

Operando, de la (2.150) se obtiene:

$$(2.151) \quad dS \cdot \cos \frac{d\alpha}{2} = \mu dN$$

Si se considera que es  $\frac{d\alpha}{2} \cong 0 \Rightarrow \cos \frac{d\alpha}{2} \cong 1$ . Luego la (2.151) se puede escribir:

$$(2.152) \quad dN = \frac{dS}{\mu}$$

$$(2.153) \quad \Sigma V \equiv (S + dS) \cdot \sin \frac{d\alpha}{2} + S \cdot \sin \frac{d\alpha}{2} = dN$$

Operando, de la (2.153) se obtiene:

$$(2.154) \quad 2S \cdot \sin \frac{d\alpha}{2} + dS \cdot \sin \frac{d\alpha}{2} = dN$$

Por ser muy pequeño  $\frac{d\alpha}{2}$ , el seno del ángulo se puede suponer igual al ángulo en radianes:  $\sin \frac{d\alpha}{2} \cong \frac{d\alpha}{2}$ ; además, por ser diferencial de segundo orden es  $dS \cdot \sin \frac{d\alpha}{2} \cong 0$ . Reemplazando  $\sin \frac{d\alpha}{2}$  por  $\frac{d\alpha}{2}$  y haciendo  $dS \cdot \sin \frac{d\alpha}{2}$  igual a cero en la (2.154) se obtiene:

$$(2.155) \quad S \cdot d\alpha = dN$$

De la (2.152) y (2.155) resulta:

$$(2.156) \quad \frac{dS}{\mu} = S \cdot d\alpha$$

Operando en la (2.156) obtenemos:

$$(2.157) \quad \frac{dS}{S} = \mu \cdot d\alpha$$

Integrando la (2.157) entre  $S_1$  y  $S_2$  el primer miembro y el segundo entre  $\alpha$  y 0:

$$(2.158) \quad \int_{S_2}^{S_1} \frac{dS}{S} = \int_0^{\alpha} \mu \cdot d\alpha \quad \Rightarrow \quad \ln \frac{S_1}{S_2} = \mu \cdot \alpha$$

Aplicando el antilogaritmo a la (2.158) se tiene la expresión:

$$\frac{S_1}{S_2} = e^{\mu\alpha}$$

(2.159)

o también:

$$S_1 = S_2 e^{\mu\alpha}$$

(2.160)

La (2.159) y (2.160) son las expresiones del *Teorema de Prony*, válido también para una sección de la correa no circular en la que el ángulo total de contacto sea  $\alpha$  y el coeficiente de rozamiento entre correa y polea sea  $\mu$ . Esta conclusión se obtiene del hecho de que el radio del tambor no interviene en las ecuaciones de equilibrio.  $S_1 > S_2$  pues  $e^{\mu\alpha} \geq 1$  pues es  $\mu > 0$  y  $\alpha > 0$ .

La fuerza tangencial que debe transmitirse por rozamiento no debe ser mayor que la diferencia de esfuerzos  $S_1 - S_2$  para impedir que la correa resbale sobre la polea.

Por lo tanto la fuerza tangencial  $T$  a transmitir por la correa debe ser:

$$T = S_1 - S_2$$

(2.161)

Reemplazando en la (2.161)  $S_1$  y  $S_2$  por sus valores obtenidos de la (2.159) en función de  $\mu$  y de  $\alpha$ :

$$T = S_1 - \frac{S_1}{e^{\mu\alpha}} = S_1 \frac{e^{\mu\alpha} - 1}{e^{\mu\alpha}}$$

(2.162)

o también, en función de  $S_2$ :

$$T = S_2 e^{\mu\alpha} - S_2 = S_2 (e^{\mu\alpha} - 1)$$

(2.163)

Conociendo  $T$  a partir de la potencia del motor, como los valores de  $\mu$  y de  $\alpha$  están tabulados en manuales especializados, se pueden obtener  $S_1$  y  $S_2$  despejándolos de la (2.162) y de la (2.163) respectivamente.

$$\text{a) } S_1 = \frac{T \cdot e^{\mu\alpha}}{e^{\mu\alpha} - 1} \quad \text{y} \quad \text{b) } S_2 = \frac{T}{e^{\mu\alpha} - 1}$$

(164)

Si se enrolla un número  $n$  de vueltas una cuerda en un tambor, el ángulo  $\alpha$  resulta ser  $2\pi n$  radianes. Cuando la velocidad de giro se hace grande, la correa tiende a separarse de la llanta, por lo que la ecuación de *Prony* lleva consigo un cierto error para velocidades muy altas.

### **Frenos de cintas**

Se produce el frenado de un tambor o polea que está girando mediante una cinta de alta resistencia construida de un material especial para obtener un alto coeficiente de roce, la cual envuelve al tambor en movimiento, estando sujeta en ambos lados a una palanca la cual al ser accionada aplicando una fuerza en su extremo, comprime la cinta contra el

tambor frenándolo. Se pueden distinguir tres tipos de frenos de cinta: *simple*, *diferencial* y *totalizador*.

a) **Freno simple** (pivote en la recta de acción de  $S_1$  o  $S_2$ )

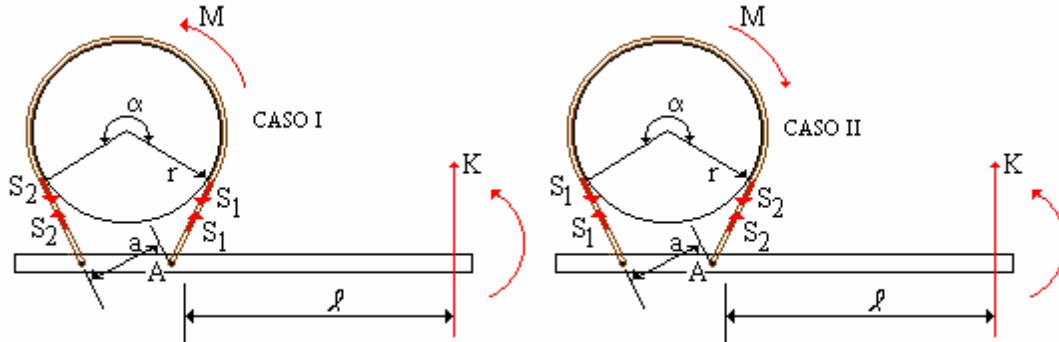


Fig.2.31

En este tipo, un extremo de la cinta está sujeto al punto fijo de giro "A" de la palanca (Fig.231). De acuerdo al sentido de rotación se obtendrá a la derecha o a la izquierda el tramo de mayor tracción  $S_1$ . Para el caso I es el de la derecha ya que se suma el esfuerzo de frenado más el arrastre del tambor, en tanto que el  $S_2$  se descarga por este arrastre. En el caso II sucede a la inversa. El tambor se comporta en forma análoga a la p Polea motriz del punto anterior. La fuerza  $K$  necesaria para el frenado se determina en la forma siguiente: se toman momentos respecto de A:

$$\text{Caso I:} \quad K.l = S_2.a \quad \Rightarrow \quad K = \frac{S_2.a}{l} \quad (2.165)$$

$$\text{Caso II:} \quad K.l = S_1.a \quad \Rightarrow \quad K = \frac{S_1.a}{l} \quad (2.166)$$

Reemplazando en la (2.165) y en la (2.166)  $S_2$  y  $S_1$  por los valores dados por la (2.164b) y la (2.164a) respectivamente se obtienen:

$$K = \frac{T.a}{l} \cdot \frac{1}{e^{\mu\alpha} - 1} \quad (2.167)$$

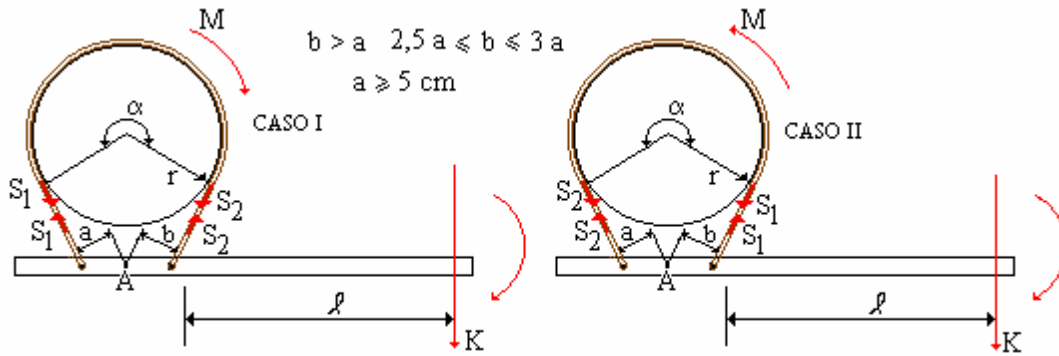
y

$$K = \frac{T.a}{l} \frac{e^{\mu\alpha}}{e^{\mu\alpha} - 1} \quad (2.168)$$

La (2.167) y la (2.168) nos dan la fuerza de frenado en función del esfuerzo tangencial, ángulo  $\alpha$  al centro de enrollamiento y coeficiente de rozamiento  $\mu$ .

b) **Freno diferencial** (con pivote entre  $S_1$  y  $S_2$ )



**Fig.2.32**

La distribución y el sentido de los momentos (Fig.2.32) hace que la fuerza de frenado sea menor que la correspondiente al simple.

Para ambos sentidos de rotación, (casos I y II), tomando momentos respecto al punto  $A$  se obtiene:

Caso I :  $-K.l + S_2.b = S_1.a$   
(2.169)

Despejando de la (2.169)  $K$ :

$$K = \frac{S_2.b - S_1.a}{l}$$

(2.170)

Y reemplazando en la (2.170)  $S_1$  y  $S_2$  por sus valores dados por la (2.164a) y la (2.164b) respectivamente, en función de  $T$ ,  $\mu$  y  $\alpha$  se obtiene:

$$K = \frac{T}{l} \frac{b - a.e^{\mu\alpha}}{e^{\mu\alpha} - 1}$$

(2.171)

Caso II :  $-K.l + S_1.b = S_2.a$   
(2.172)

Despejando  $K$  de la (2.172):

$$K = \frac{S_1.b - S_2.a}{l}$$

(2.173)

Y reemplazando en la (2.173)  $S_1$  y  $S_2$  por sus valores dados por la (2.164a) y (2.164b) respectivamente, en función de  $T$ ,  $\mu$  y  $\alpha$  se obtiene:

$$K = \frac{T}{l} \frac{b.e^{\mu\alpha} - a}{e^{\mu\alpha} - 1}$$

(2.174)

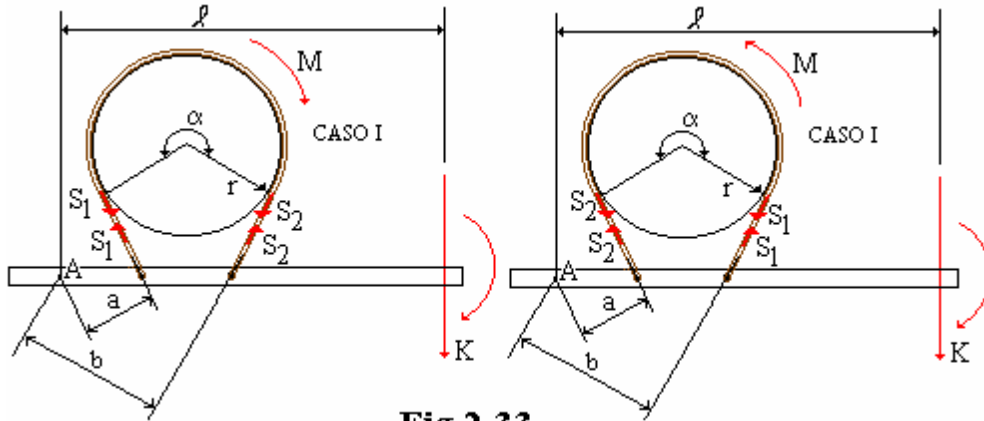
Por ser por construcción  $a < b$  las fuerzas de frenado para ambos casos es diferente, siendo por lo tanto:

$$\frac{T b - a e^{\mu\alpha}}{l e^{\mu\alpha} - 1}$$

$$< \frac{T b e^{\mu\alpha} - a}{l e^{\mu\alpha} - 1}$$

(2.175)

c) **Freno totalizador** (pivotes fuera de  $S_1$  y  $S_2$ )



**Fig.2.33**

Para este caso el momento aplicado es mayor, por lo que la fuerza de frenado es mayor que en los otros casos.

Para ambos sentidos de rotación, (casos I y II), tomando momentos respecto al punto A se obtiene:

Caso I :  $-K.l + S_2.b + S_1.a = 0$   
(2.176)

Despejando  $K$  de la (2.176) se obtiene :

$$K = \frac{S_1.a + S_2.b}{l}$$

(2.177)

Y reemplazando en la (2.177)  $S_1$  y  $S_2$  por sus valores dados por la (2.164a) y (2.164b) respectivamente, en función de  $T$ ,  $\mu$  y  $\alpha$  se obtiene:

$$K = \frac{T a e^{\mu\alpha} + b}{l e^{\mu\alpha} - 1}$$

(2.178)

Caso II :  $-K.l + S_1.b + S_2.a = 0$   
(2.179)

Despejando  $K$  de la (2.179) se obtiene:

$$K = \frac{S_1.b + S_2.a}{l}$$

(2.180)

Y reemplazando en la (2.180)  $S_1$  y  $S_2$  por sus valores dados por la (2.164a) y (2.164b) respectivamente, en función de  $T$ ,  $\mu$  y  $\alpha$  se obtiene:

$$K = \frac{T b.e^{\mu\alpha} + a}{l e^{\mu\alpha} - 1}$$

(2.181)

**Plano inclinado considerando el rozamiento**

Analizando la figura 2.5 vista anteriormente, y considerando un plano inclinado un ángulo  $\alpha$  sobre la horizontal y sobre éste un sólido sobre el que actúa solo su peso  $P$ ; el mismo es solicitado hacia abajo por la fuerza componente paralela al plano inclinado  $T = P \text{ sen}\alpha$ , dada por la expresión (2.12); la fuerza de rozamiento que se opone a la caída del mismo es  $R = \mu N = \mu P \text{ cos}\alpha$ , dada por la expresión (2.13), siendo  $\mu = \text{tg } \varphi$  el coeficiente de rozamiento y  $\varphi$  el ángulo de rozamiento.

En el equilibrio es:

$$\text{tg}\alpha = \text{tg}\varphi$$

(2.182)

Si es  $\alpha > \varphi$  es:

$$\text{tg}\alpha > \text{tg}\varphi$$

(2.183)

y el cuerpo caerá hacia abajo pues es:

$$T > R$$

(2.184)

Suponemos ahora aplicada una fuerza  $F$  sobre el centro de gravedad  $G$  formando un ángulo  $\beta$  con la paralela al plano inclinado. Se pueden presentar los siguientes casos según sea el valor del ángulo  $\beta$ :

1- Fuerza  $F_{1\beta}$  necesaria para impedir que el cuerpo caiga (Fig.2.34).

La resistencia que opone la fuerza de rozamiento  $R$  está orientada hacia arriba y su valor es:

$$R = \mu N$$

(2.185)

Además es:

$$N = P \text{ cos}\alpha - F_{1\beta} \text{ sen}\beta$$

(2.186)

siendo  $F_{1\beta} \text{ sen}\beta$  la componente vertical de  $F_{1\beta}$ .

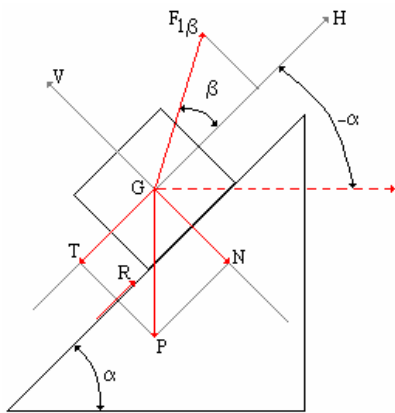
De la (2.185) y (2.186) resulta:

$$R = \mu P \text{ cos}\alpha - \mu F_{1\beta} \text{ sen}\beta$$

(2.187)

Además, la componente horizontal de la  $F_{1\beta}$  es:

$$F_{1\beta H} = F_{1\beta} \text{ cos}\beta \tag{2.188}$$



**Fig.2.34**

Si el cuerpo está en equilibrio debe ser:

$$(2.189) \quad \Sigma H = R + F_{1\beta H} = 0$$

Reemplazando en la (2.189) los valores de  $R$  y  $F_{1\beta H}$  dados por las (2.187) y (2.188) respectivamente, se tendrá:

$$(2.190) \quad F_{1\beta} \cos\beta + (\mu P \cos\alpha - \mu F_{1\beta} \sin\beta) - P \sin\alpha = 0$$

De la (2.190) se puede despejar  $F_{1\beta}$ :

$$(2.191) \quad F_{1\beta} = P \frac{\sin\alpha - \mu \cos\alpha}{\cos\beta - \mu \sin\beta}$$

El coeficiente de rozamiento es:

$$(2.192) \quad \mu = \operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$$

Reemplazando en la (2.191) el valor de  $\mu$  en función del seno y coseno dada por la (2.192), y operando se obtiene:

$$(2.193) \quad F_{1\beta} = P \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos(\beta - \varphi)}$$

Se pueden presentar distintos casos particulares:

a) Si es  $\beta = -\alpha$ , la fuerza es horizontal, paralela a la base del plano inclinado, resultando por lo tanto la (2.193), luego de reemplazar en ella  $\beta$  por  $-\alpha$ :

$$(2.194) \quad F_{1\beta} = P \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos(-\alpha + \varphi)} = P \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos(\alpha - \varphi)} = P \operatorname{tg}(\alpha - \varphi)$$

b) Si es  $\beta = 0$ , la fuerza es paralela al plano inclinado, resultando:

$$(2.195) \quad F_{1\beta} = P \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos\varphi}$$

c) La fuerza mínima para impedir la caída del cuerpo se obtienen de derivar la (2.193) respecto del ángulo  $\beta$  e igualando a cero ésta derivada:



$$F_{2\beta} = P \frac{\text{sen}(\alpha + \varphi)}{\cos \varphi}$$

(2.204)

c) La fuerza  $F_{2\beta}$  mínima para elevar el cuerpo hacia arriba se la obtiene igualando a cero la derivada respecto de  $\beta$  de la (2.202):

$$\frac{dF}{d\beta} = \frac{d}{d\beta} \left[ P \frac{\text{sen}(\alpha + \varphi)}{\cos(\beta - \varphi)} \right] = P \frac{\text{sen}(\beta - \varphi) \text{sen}(\alpha + \varphi)}{[\cos(\beta - \varphi)]^2} = 0$$

(2.205)

Para que sea cero la expresión debe ser cero el numerador:

$$\text{sen}(\beta - \varphi) \cdot \text{sen}(\alpha + \varphi) = 0$$

(2.206)

Como es  $\alpha + \varphi \neq 0$  debe ser  $\beta - \varphi = 0 \Rightarrow \beta = \varphi$ . reemplazando en la (2.202)  $\beta$  por  $\varphi$  se obtiene:

$$F_{2\beta} = P \cdot \text{sen}(\alpha + \varphi)$$

(2.207)

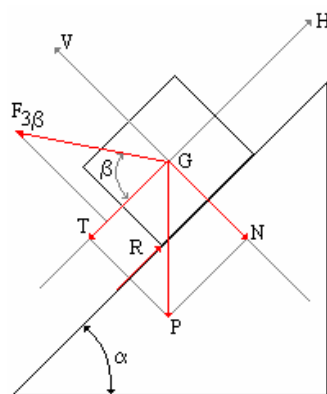


Fig.2.36

3- Si ahora se considera que el cuerpo no desciende por su propio peso, o sea que resulta para este caso que es  $\alpha < \varphi$ , y por lo tanto es  $R > T$  (Fig.2.36) y se opone al descenso del mismo, se tiene:

$$R = \mu N = \mu(P \cdot \cos \alpha - F_{3\beta} \cdot \text{sen} \beta)$$

(2.208)

En el equilibrio se tendrá:

$$\Sigma H \equiv P \cdot \text{sen} \alpha + F_{3\beta} \cos \beta - \mu(P \cdot \cos \alpha - F_{3\beta} \cdot \text{sen} \beta) = 0 \quad (2.209)$$

Despejando de la (2.209)  $F_{3\beta}$  y reemplazando  $\mu$  por  $\text{tg} \varphi =$

$$\frac{\text{sen} \varphi}{\cos \varphi}$$

se obtiene:

$$F_{3\beta} = P \frac{\mu \cos \alpha - \text{sen} \alpha}{\cos \beta + \mu \text{sen} \beta} = P \frac{\text{sen}(\varphi - \alpha)}{\cos(\beta - \varphi)}$$

(2.210)

Se pueden presentar los siguientes casos particulares, según sea el valor de  $\beta$ :

a) Si es  $\beta = \alpha$ , la fuerza  $F_{3\beta}$  será paralela a la base del plano inclinado, resultando de la (2.210):

$$F_{3\beta} = P \frac{\text{sen}(\varphi - \alpha)}{\cos(\alpha - \varphi)} = P \cdot \text{tg}(\varphi - \alpha)$$

(2.211)

b) Si es  $F_{3\beta}$  paralela al plano inclinado es  $\beta = 0$ , por lo tanto de la (2.210) se obtiene:

$$F_{3\beta} = P \frac{\text{sen}(\varphi - \alpha)}{\cos \varphi}$$

(2.212)

c) La fuerza necesaria  $F_{3\beta}$  mínima para hacer descender el cuerpo se la obtiene de igualar a cero la derivada con respecto a  $\beta$  la (2.210):

$$\frac{dF_{3\beta}}{d\beta} = \frac{d}{d\beta} \left[ P \frac{\text{sen}(\varphi - \alpha)}{\cos(\beta - \varphi)} \right] = P \frac{\text{sen}(\beta - \varphi) \text{sen}(\varphi - \alpha)}{[\cos(\beta - \varphi)]^2} = 0$$

(2.213)

Para que la expresión (2.213) sea cero debe ser cero el numerador. Además, como es  $\varphi - \alpha \neq 0$ , debe ser  $\beta - \varphi = 0$ , o sea,  $\beta = \varphi$ , por lo que resulta la (2.210):

$$F_{3\beta} = P \frac{\text{sen}(\varphi - \alpha)}{\cos(\varphi - \varphi)} = P \cdot \text{sen}(\varphi - \alpha)$$

(2.214)

### **Tornillo de movimiento**

Es un mecanismo utilizado en muchos aparatos elevadores y transportadores (Fig.2.37a), constituido por un perno roscado que gira dentro de una tuerca y eleva o hace descender una carga utilizando el principio del plano inclinado. Se puede distinguir el paso  $h$ , el ángulo  $\alpha$  de inclinación de la hélice y el radio medio  $r_m$  de la misma.

Suponiendo que sea  $Q$  a la carga que se encuentra aplicada en la dirección del eje del tornillo y sobre el extremo del mismo y la cual se desea elevar, y  $P$  el esfuerzo que se ejerce en el extremo de una palanca a una distancia  $a$  del eje del tornillo para hacerlo girar y elevar la carga.

Se puede considerar que los filetes del tornillo corresponden a un plano inclinado un ángulo  $\alpha$  sobre el cual se empuja la carga  $Q$ , que se encuentra a una distancia  $r_m$  del eje del tornillo, con una fuerza  $F_h$  para que ascienda por el plano (Fig.2.37b), correspondiendo al caso particular 2a de plano inclinado visto anteriormente; si es  $r_m$  el radio medio de la hélice (semisuma de los radios del filete  $r_l$  y del cuerpo del vástago roscado  $r_2$ ), respecto del eje del tornillo se ejercerá un momento  $F_h \cdot r_m$ .

Suponiendo el collar del asiento en el extremo del tornillo sin rozamiento, el momento  $M_m = P \cdot a$  que se realiza con la fuerza  $P$  y la palanca  $a$  sobre el eje del tornillo debe ser igual al momento  $M_m = F_h \cdot r_m$  de la fuerza  $F_h$  con un brazo de palanca  $r_m$ :

$$M_m = P \cdot a = F_h \cdot r_m$$

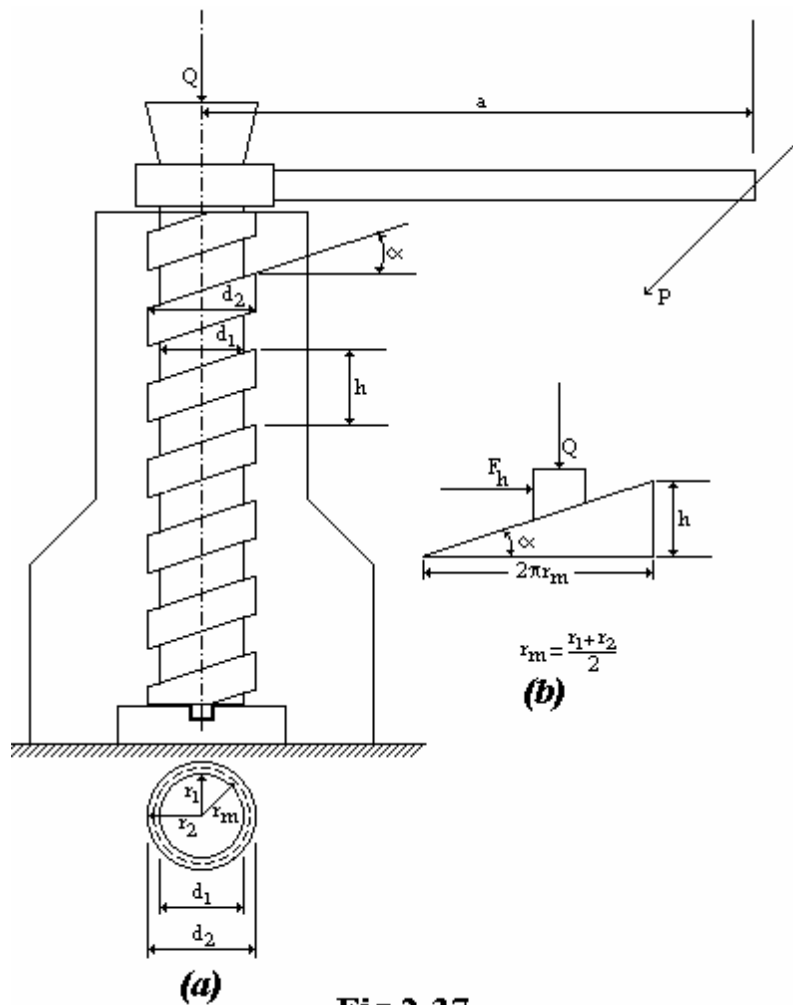
(2.215)

El valor de  $F_h$  en función de la carga  $Q$ , según la (2.203), es:

$$(2.216) \quad F_h = Q \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \varphi)$$

Por lo tanto, la (2.215) resulta, reemplazando el valor de  $F_h$  por su valor dada por la (2.216):

$$(2.217) \quad M_m = F_h \cdot r_m = Q \cdot r_m \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \varphi)$$



**Fig.2.37**

Que es el momento necesario para ascender la carga.

Para bajar la carga, el momento necesario está dado por la (2.211) del caso 3a del plano inclinado:

$$(2.218) \quad M_m = Q \cdot r_m \cdot \operatorname{tg}(\varphi - \alpha)$$

Si no existiera el rozamiento sería  $\varphi = 0$ , resultando la (2.217):

$$(2.219) \quad M_0 = Q \cdot r_m \cdot \operatorname{tg} \alpha$$



Por lo tanto el rendimiento considerando el rozamiento se lo puede obtener del cociente entre la (2.219) y la (2.217):

$$\eta = \frac{M_0}{M_m} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)}$$

(2.220)

Por ser, según desarrollo trigonométrico:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \varphi) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \varphi}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \varphi}$$

(2.221)

Reemplazando en la (2.217) la expresión  $\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)$  dada por la (2.221), se obtiene:

$$F_h = Q \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \varphi}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \varphi}$$

(2.222)

Pero de la figura (Fig.2.37b) resulta:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{2\pi r_m}$$

(2.223)

Como además, por la (2.15) es  $\operatorname{tg} \varphi = \mu$ , reemplazando en la (2.222) estas dos expresiones de  $\operatorname{tg} \alpha$  y  $\operatorname{tg} \varphi$ , será:

$$F_h = Q \frac{\frac{h}{2\pi r_m} + \mu}{1 - \frac{h}{2\pi r_m} \mu} = Q \frac{h + \mu 2\pi r_m}{2\pi r_m - h\mu}$$

(2.224)

La expresión (2.224) da la fuerza necesaria para elevar la carga  $Q$ .

En la ecuación (2.218), que da la fuerza  $F_h$  necesaria para bajar la carga  $Q$ , el factor  $\operatorname{tg}(\varphi - \alpha)$  puede reemplazarse por la expresión trigonométrica:

$$\operatorname{tg}(\varphi - \alpha) = \frac{\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \varphi}$$

(2.225)

Por lo que se obtiene finalmente, reemplazando además  $\operatorname{tg} \alpha$  dada por la (2.223) y  $\mu$  dada por la (2.15), la siguiente expresión:

$$F_h = Q \frac{\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \varphi} = Q \frac{\mu - \frac{h}{2\pi r_m}}{1 + \frac{h}{2\pi r_m} \mu} = Q \frac{2\pi r_m \mu - h}{2\pi r_m + h\mu}$$

(2.226)

La (2.224) y la (2.226) relacionan los esfuerzos horizontales  $F_h$  con la carga  $Q$  que se debe elevar y las dimensiones  $r_m$  del tornillo.

El esfuerzo  $P$  a ejercer con la palanca  $a$  para subir la carga  $Q$  se obtiene de la (2.215), reemplazando  $F_h$  por el valor dado por la (2.224):

$$M_m = P \cdot a = Q \frac{h + \mu 2\pi r_m}{2\pi r_m - h\mu} r_m$$

(2.227)

Despejando  $P$  de la (2.227) se obtiene:

$$P = Q \frac{r_m}{a} \frac{h + \mu 2\pi r_m}{2\pi r_m - h\mu}$$

(2.228)

Para bajar la carga, utilizando en la (2.215) el valor de  $F_h$  dado por la (2.226), se obtiene:

$$M_m = P \cdot a = Q \frac{\mu 2\pi r_m - h}{2\pi r_m + h\mu} r_m$$

(2.229)

Despejando  $P$  de la (2.229) se obtiene:

$$P = Q \frac{r_m}{a} \frac{\mu 2\pi r_m - h}{2\pi r_m + h\mu}$$

(2.230)

Si en la (2.229) es  $M_m \leq 0$  la carga desciende por sí sola; es el caso donde es  $\alpha > \varphi$ , siendo tornillos de pasos  $h$  grandes o de material de muy bajo coeficiente de fricción.

Si es  $M_m > 0$  el tornillo se dice que es *autoasegurante* o *autoblocante*, ya que la carga  $Q$  no baja por sí misma, siendo  $\alpha > \varphi$  pues es en la (2.230):

$$\text{a) } \mu 2\pi r_m \geq h \Rightarrow \text{b) } \mu \geq \frac{h}{2\pi r_m} = \operatorname{tg} \alpha \quad \therefore \text{c) } \varphi > \alpha$$

(2.231)

-----○-----

Apuntes de clases extractados de la siguiente bibliografía

| TÍTULO                             | AUTOR                   | EDITORIAL        |
|------------------------------------|-------------------------|------------------|
| Mecánica Técnica y Mecanismos      | Lorenzo A. Facorro Ruiz | Ediciones Melior |
| Mecánica Técnica                   | Timoshenko-Young        | Hachette         |
| Cálculo de Elementos de Máquinas   | Vallance - Doughtie     | Alsina           |
| Manual del Constructor de Máquinas | H. Dubbel               | Labor            |
| Mecánica                           | J. L. Meriam            | Reverté, S.A.    |
| Diseño de elementos de Máquinas    | Shigley                 | Mc Graw Hill     |